

# Physique des fluides (S1-S7)

LPHYS1213

Lecture notes

2025–2026

Michel Crucifix

Faculté des Sciences



# Table des matières

0.1	Un cours en deux sections . . . . .	9
0.2	La dynamique des fluides est contre-intuitive . . . . .	10
0.3	Préparer votre assistance au cours . . . . .	11
0.4	Les marges rouges . . . . .	11
0.4.1	Évaluation . . . . .	11
0.4.2	Calendrier . . . . .	12
<b>1</b>	<b>L'équation de continuité</b>	<b>13</b>
1.1	L'hypothèse du milieu continu . . . . .	13
1.2	L'élément de fluide comme élément différentiel . . . . .	14
1.3	Dérivées eulérienne et lagrangienne . . . . .	15
1.4	Volume matériel . . . . .	18
1.5	Analogie du trafic routier . . . . .	19
1.6	Équation de la conservation de la masse (3D) . . . . .	22
1.7	Equation de conservation sous formes eulérienne et la- grangienne . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Equation d'Euler</b>	<b>25</b>
2.1	Théorème de Gauss - Ostrogradsky pour un gradient . . . . .	25
2.2	Hydrostatique . . . . .	26
2.2.1	Expression de la seconde loi de Newton . . . . .	26
2.2.2	Poussée d'Archimède . . . . .	27
2.3	Équation d'Euler . . . . .	31
2.3.1	Bilan des forces sur un élément matériel . . . . .	31
2.3.2	L'advection de la vitesse génère un tenseur . . . . .	32
2.3.3	Interprétation physique de l'advection de quantité de mouvement . . . . .	33
2.3.4	Équation du mouvement sous forme conservative	33

<b>3</b>	<b>Description du champ de vitesse</b>	<b>35</b>
3.1	Description Eulérienne . . . . .	35
3.1.1	Hypothèse de l'écoulement laminaire . . . . .	35
3.1.2	Lignes de courant . . . . .	35
3.1.3	Section de lignes de courant dans un écoulement . . . . .	37
3.1.4	Écoulement tri-dimensionnel : tubes de courant . . . . .	37
3.1.5	Écoulements bi-dimensionnels . . . . .	40
3.1.6	Écoulements 2-D typiques . . . . .	40
3.1.7	Potentiels scalaires et vecteurs . . . . .	42
3.1.8	Écoulement bi-dimensionnel stationnaire incompressible . . . . .	42
3.2	Description Lagrangienne d'un écoulement non-stationnaire	43
3.2.1	Ligne de chemin . . . . .	44
3.2.2	Ligne de trace (streakline) . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Écoulements incompressibles et irrotationnels non visqueux</b>	<b>47</b>
4.1	Théorème de Bernoulli . . . . .	47
4.2	Équation de la vorticité . . . . .	48
4.3	Équation de Laplace complexe et conditions de Cauchy-Rieman . . . . .	51
4.3.1	Écoulement potentiel complexe . . . . .	51
4.3.2	Écoulements complexes potentiels type . . . . .	52
4.3.3	Écoulement autour d'un cylindre (sans circulation)	54
4.4	Analyse de l'écoulement autour d'un cylindre avec circulation . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Écoulements visqueux</b>	<b>61</b>
5.1	Équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible . . . . .	61
5.2	Tenseur des contraintes . . . . .	64
5.3	Dérivation formelle de l'équation de Navier-Stokes . . . . .	65
5.4	Écoulements de Poiseuille . . . . .	67
5.4.1	Écoulement de Poiseuille plan . . . . .	67
5.4.2	Écoulement de Poiseuille dans un cylindre . . . . .	68
5.4.3	Conditions laminaires et écoulement développé . . . . .	69
5.5	Écoulement très visqueux autour d'une sphère (écoulement de Stokes) . . . . .	70

<b>6</b>	<b>Modèles d'écoulements et similarité dynamique</b>	<b>73</b>
6.1	Analyse dimensionnelle . . . . .	73
6.1.1	Exemple du pendule simple . . . . .	73
6.1.2	Théorème de Buckingham et nombres adimensionnels . . . . .	74
6.1.3	Similarité dynamique et applications . . . . .	75
6.2	Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes . .	76
6.2.1	Transition vers le régime turbulent . . . . .	76
6.2.2	Prédiction de l'épaisseur de la couche limite . . . .	78
6.2.3	Discussion . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Tension de surface</b>	<b>83</b>
7.1	Origine de la tension de surface . . . . .	83
7.1.1	Point de vue macroscopique . . . . .	83
7.1.2	Pression statique et dynamique . . . . .	84
7.1.3	Point de vue microscopique : accélération verticale des molécules . . . . .	86
7.1.4	Point de vue thermodynamique : tension de surface	86
7.2	Tension d'une surface courbe . . . . .	87
7.3	Interfaces triples : Young - Dupré . . . . .	90
7.4	Ondes de gravité - capillarité . . . . .	91
<b>8</b>	<b>Conservation de l'énergie</b>	<b>95</b>
8.1	Equation de conservation de la quantité de mouvement . .	95
8.2	Forme intégrale de la conservation de l'énergie mécanique	96
8.3	Équations thermodynamiques . . . . .	98
8.3.1	Forme intégrale du premier principe de la thermodynamique . . . . .	98
8.3.2	Équation de la chaleur . . . . .	99
8.4	Hypothèse de Boussinesq . . . . .	100
8.4.1	Définition et contexte . . . . .	100
8.4.2	Equation de continuité . . . . .	100
8.4.3	Equation du mouvement . . . . .	100
8.4.4	Implication sur l'équation de conservation d'énergie	101
8.4.5	L'approximation de Boussinesq dans l'atmosphère	103

<b>A</b>	<b>Transformations des tenseurs de Rang 2</b>	<b>105</b>
A.1	Transformation des coordonnées . . . . .	105
A.2	Invariants scalaires . . . . .	105
A.3	Décomposition Symétrique et Antisymétrique . . . . .	106

# Nomenclature

$(r, \theta)$  Coordonnées sphériques

$\delta_{ij}$  delta de Kronecker : 1 si  $i = j$ , 0 sinon

$d\mathcal{S}$  Élément de section

$D$  incrément matériel

$\frac{D}{Dt}$  dérivée matérielle par rapport au temps

$\gamma$  Coefficient de tension de surface

$\mathcal{A}$  Frontière du volume matériel

$\mathcal{S}_{ab}$  Section entre  $a$  et  $b$

$\mathcal{V}$  Volume matériel

$\phi^s$  Fonction de flot, projetant un domaine au temps  $t$  à son image au temps  $t + s$

$Re$  Nombre de Reynolds

$\rho$  masse volumique

$\psi$  fonction de courant,  $\psi_z$  pour un écoulement dans le plan  $(x, y)$ ;  $\psi_\phi$  pour un écoulement axi-symétrique

$\Psi$  potentiel complexe de vitesse (écoulement 2-D)

$\phi$  potentiel scalaire de vitesse

$H$  Énergie libre de Helmholtz

$t$  temps

$z^*$  Complexe conjugué de  $z$

$\Phi$	potentiel de force externe, généralement le géopotentiel
$\mu$	Coefficient de viscosité. Unité MKS : Pa · s
$\nu$	Viscosité dynamique. Unité MKS : m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$\mathbf{r}_h$	composante horizontale du vecteur position
$\underline{\underline{\tau}}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\underline{\underline{T}}$	Tenseur des contraintes total
$\mathbf{u}$	vecteur vitesse
$\mathbf{u}_h$	composante horizontale de la vitesse
$\boldsymbol{\omega}$	Vecteur de vortacité
$\phi$	potentiel vecteur

# Remarques préliminaires

## 0.1 Un cours en deux sections

La physique des fluides s'enseigne aux étudiants en physique à l'UCLouvain depuis de nombreuses années, motivée en son temps par le professeur André Berger qui y voyait une matière essentielle pour aborder la dynamique des atmosphères et des océans. En effet, des phénomènes tels que les marées, les tsunamis, les anticyclones mettent en jeu des mouvements à grande échelle que l'on ne peut pas appréhender avec les seuls outils donnés par la mécanique du point. La physique des fluides est évidemment pertinente à des plus petites échelles : dynamique d'une goutte d'eau, aérodynamique, acoustique...Le champ d'application est immense.

L'ouvrage "Fluid Dynamics" de P. Kundu, I. Cohen et R. Dowling fait référence dans le monde occidental et a largement inspiré ce cours. Il en est à sa 7<sup>e</sup> édition I. M. P. K. C. KUNDU et ROWLING 2024 — les éditions successives ne gagnant malheureusement pas toujours en clarté. L'exposé des applications aérodynamiques a également été inspiré[e] de ACHESON 2001, une référence toute britannique. La dynamique des fluides en rotation est bien sûr essentielle pour toutes les applications géophysiques. Cette matière sera vue pendant la seconde partie du cours par le Prof. Deleersnijder et n'est pas couverte par ces notes. On doit aux professeurs Cushman-Roisin et Beckers (deux Belges) un excellent ouvrage d'introduction à la dynamique des fluides géophysiques qui vous servira de référence. La seconde édition date de 2011 CUSHMAN-ROISIN et BECKERS 2011.

Au risque de caricaturer, on pourrait esquisser à traits grossiers que la dynamique des fluides à l'Ouest du rideau de fer a été fortement couplée aux progrès en matière de calcul numérique, stimulée notamment par des investissements dans les technologies nécessaires à l'aéronautique. Du côté soviétique, les outils numériques n'ont pas pénétré les universités de la

même manière, si bien que l'approche, par exemple, de l'ouvrage de Landau et Lifshitz est concise et mathématiquement "efficace", mobilisant notamment fortement les lois d'échelle (Chapitre XX). À beaucoup d'égards, l'emblématique ouvrage de Batchelor (Cambridge, [BATCHELOR 2000](#)), témoin d'une école européenne, est également très attentif à la rigueur mathématique.

La tradition propre à l'École de physique de l'UCLouvain est de présenter la matière de façon à ce que les étudiantes et étudiants prennent bien conscience de la puissance des raisonnements analytiques, et de la force que l'on peut dégager de la rigueur conceptuelle. Nous tentons ici d'être fidèles à cette approche. Il nous a cependant semblé indispensable, pour consolider l'intuition physique, de mettre à disposition plusieurs notebooks Python qui permettent d'expérimenter la réponse des écoulements dans quelques cas simples. Une séance de laboratoire permettra également d'illustrer quelques concepts fondamentaux d'hydrostatique.

La recherche en dynamique et la physique des fluides donne l'illustration parfaite d'une discipline qui nécessite la synthèse d'une approche théorique, computationnelle, et expérimentale. Nous espérons développer le volet expérimental d'année en année, notamment en collaboration avec l'EPL de l'UCLouvain.

## 0.2 La dynamique des fluides est contre-intuitive

Dans l'introduction de leur ouvrage, I. M. P. K. C. KUNDU et ROWLING [2024](#) donnent huit exemples de comportements contre-intuitifs, dont nous citons ici les 7 premiers (listés dans la troisième édition P. K. KUNDU et COHEN [2004](#) pp. xxiii :

- Des causes infiniment infimes peuvent causer des grands effets (paradoxe de d'Alembert)
- Des problèmes symétriques peuvent avoir des solutions non-symétriques
- La friction peut rendre le débit plus rapide et le refroidir
- Rendre une surface plus rugueuse peut réduire sa traînée
- Introduire de la chaleur dans un écoulement peut réduire sa température

- La friction peut déstabiliser un écoulement stable
- Sans friction, les oiseaux (et les avions) ne pourraient pas voler

Comme le champ de ce cours est moins ambitieux que celui de Kundu, nous ne résoudrons pas tous ces paradoxes... mais certains apparaîtront en creux dans la théorie et les exercices. Je vous invite, à la fin de ce cours, à les relire en espérant que vous en aurez résolu quelques uns.

### 0.3 Préparer votre assistance au cours

La pédagogie s'inspire du mouvement de "slow teaching" : on préfère se donner le temps de travailler les concepts en profondeur que de chercher à couvrir une grande quantité de matière. Le cours est donné au tableau, interrompu par des petits exercices. Chaque séance de cours correspond *grosso modo* à un chapitre (voir le calendrier sur Moodle). Vous êtes fortement encouragés à lire le chapitre avant de venir au cours. Cela rendra la science théorique beaucoup plus fluide et vous permettra de vous concentrer sur la compréhension de la matière. Le temps que vous consacrerez à la préparation du cours en amont sera gagné deux fois : vous tirerez davantage parti de la séance de cours, et grâce à cela, vous appréhendez plus facilement les exercices : cela réduira d'autant votre temps d'étude.

### 0.4 Les marges rouges

Les sections marquées d'un trait rouge en marge sont données pour références. Elle sont considérées comme trop techniques au regard des acquis d'apprentissages d'un cours de BAC2.

#### 0.4.1 Évaluation

Cette partie compte pour la moitié des points (autre partie du Prof. Deleersnijder comptant pour l'autre moitié). Elle est évaluée par un examen écrit pendant la session d'examen, comportant trois exercices dont un mobilise explicitement des éléments de théorie.

**0.4.2 Calendrier**

Le calendrier du cours est disponible sur Moodle.

# Chapitre 1

## L'équation de continuité

### 1.1 L'hypothèse du milieu continu

Nous pouvons construire un cadre pour étudier les milieux continus en s'appuyant sur deux paradigmes que vous connaissez déjà. En mécanique classique, la somme des forces appliquées à un objet produit une accélération. En thermodynamique, on définit les notions de température, de pression et d'entropie pour les appliquer à des volumes de liquide ou de gaz. Ces notions s'appliquent à la condition que le gaz est à l'équilibre thermodynamique. Cette notion d'équilibre thermodynamique suppose qu'on a affaire à un très grand nombre de molécules, qui échangent de l'énergie et du moment cinétique entre elles tellement fréquemment qu'on peut se contenter d'une description statistique de l'ensemble.

Nous allons maintenant rassembler ces deux types de raisonnement. L'objet de notre étude est un milieu continu qui n'est pas nécessairement à l'équilibre thermodynamique. Les notions de température, pression, masse volumique et même de vitesse doivent être adaptées de telle façon qu'on puisse exprimer leurs variations en fonction de la position et du temps.

Ces propriétés deviennent des champs :  $F = F(\mathbf{x}, t)$ .

Il faut bien comprendre ce que cela implique. Les outils conceptuels que nous avons à notre disposition font référence à un corps homogène, isotrope et à l'équilibre; et nous voulons décrire un milieu qui ne l'est pas. Lorsque nous parlons des variations d'une fonction, mathématiquement, nous faisons référence à sa dérivée. L'incrément différentiel d'une propriété  $F$  s'écrit (avec  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ) :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad (1.1)$$

Mathématiquement, il est entendu que les variations d'espace et de temps qui apparaissent dans cette équation sont aussi petites que l'on veut. Ce sont des «  $\varepsilon$  » dont on prend la limite tendant vers zéro. Or, on sait ce qu'il advient dans la nature : si vous considérez des volumes de plus en plus petits, vous commencez à voir apparaître la granularité moléculaire. Les molécules et les atomes s'entrechoquent, et à cette échelle aussi petite, le milieu n'est plus continu et ne peut peut-être pas être traité comme tel.

En faisant l'hypothèse d'un milieu continu, nous allons utiliser des fonctions continues de l'espace, mais en faisant la promesse de ne jamais chercher à interpréter les variations des champs à une échelle trop petite. Nous voulons limiter notre description à des volumes compatibles avec une description statistique de l'ensemble des molécules qui les contiennent. Concrètement, il faut que le volume considéré soit un ordre de grandeur plus grand que le trajet libre moyen, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs, typiquement de l'ordre de  $10^{-8}$  m. On peut donc faire l'hypothèse du milieu continu si l'on peut attribuer à des petites parcelles ou éléments de fluide des propriétés mécaniques et thermodynamiques d'un point de vue statistique (vitesse, température, pression, etc.), et si ces quantités varient suffisamment peu d'un élément à l'autre pour que l'on puisse considérer que ces éléments sont en équilibre thermodynamique avec leur environnement. Ce tour de passe-passe nous permet de définir des températures, pression ou entropies locales (à l'échelle de la parcelle, l'équilibre thermodynamique est atteint), tout en considérant que ces propriétés varient continûment à une échelle  $L \gg \varepsilon$ .

## 1.2 L'élément de fluide comme élément différentiel

Nous avons donc déjà rencontré deux notions qui charpentent la physique des fluides : celle de parcelle ou élément de fluide, et celle de champ. Bien que ce ne soit pas obligatoire, nous pouvons visualiser l'élément comme un parallélépipède rectangle défini dans un repère orthonormé. On peut, sans perte de généralité, considérer que ses arêtes ont des longueurs  $\delta x$ ,  $\delta y$  et  $\delta z$  selon les trois axes du repère.

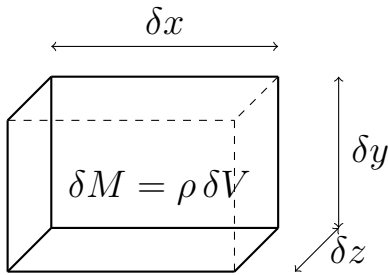


FIG. 1.1 : Élément de fluide représenté comme un parallélépipède rectangle de volume  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ .

Ainsi, par exemple, si l'on s'intéresse à la masse de l'élément, on peut écrire :

$$\delta M = \rho \delta x \delta y \delta z = \rho \delta V \quad (1.2)$$

Comme nous nous engageons à ne jamais regarder le champ sur des distances plus petites que le trajet libre moyen (l'hypothèse du milieu continu), on peut se permettre d'identifier ces arêtes à des incréments différentiels :

$$dM = \rho dV \quad (1.3)$$

Du point de vue des mathématiques, cette écriture qui met en relation un incrément de masse avec un incrément de volume peut sembler un peu informelle. On peut se rassurer en la voyant comme un raccourci de ce qui doit être une expression intégrale :

$$\iiint_M 1 dM = M(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.4)$$

La masse d'un volume est bien l'intégrale de la masse volumique prise sur ce volume.

### 1.3 Dérivées eulérienne et lagrangienne

Considérons un élément de fluide avec une propriété  $F$  (température, pression...), de position  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  et de vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ . On voudrait quantifier l'évolution de la température de l'élément, en la conceptualisant comme un objet en mouvement. Dans ce cas particulier, on peut le

qualifier d'élément matériel ou parfois de particule fluide. Le fait que la particule fluide soit en mouvement implique que ses coordonnées  $x, y, z$  sont elles-mêmes des fonctions du temps, que l'on peut déduire du champ de vitesse.

En appliquant la règle de dérivation en chaîne, on obtient la dérivée matérielle (ou dérivée lagrangienne) :

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \quad (1.5)$$

Cette équation est l'une des relations les plus fondamentales de la mécanique des fluides. En utilisant la notation du gradient, on peut aussi l'écrire :

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F \quad (1.6)$$

Au membre de gauche, nous avons la dérivée matérielle (ou lagrangienne) de la propriété  $F$ . Elle correspond à ce qu'observerait un passager « emporté par le fluide », comme un observateur dans une montgolfière. A droite, nous voyons apparaître  $\partial F / \partial t$ , la variation locale du champ  $F$  mesurée par un observateur fixe par rapport au champ. C'est la dérivée eulérienne. En réécrivant la relation sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{DF}{Dt} - \mathbf{u} \cdot \nabla F \quad (1.7)$$

on fait apparaître, à droite, terme d'advection,  $-\mathbf{u} \cdot \nabla F$ . Il exprime la variation du champ mesurée par l'observateur causée par le transport des propriétés : il est nul si la vitesse du fluide est nulle.

On en a une illustration parlante en météorologie : supposons qu'un observateur à Louvain-la-Neuve mesure d'un jour à l'autre une chute de température (description eulérienne). On peut décrire deux situations limites :

- soit nous sommes dans le cas d'une masse d'air stagnante (par exemple en situation anticyclonique) qui subit une transformation physique, typiquement une perte d'énergie interne par rayonnement. C'est donc une transformation qui s'applique sur la parcelle d'air, et qui se traduit par une variation mesurée localement par l'observateur : le premier terme du membre de droite domine ;

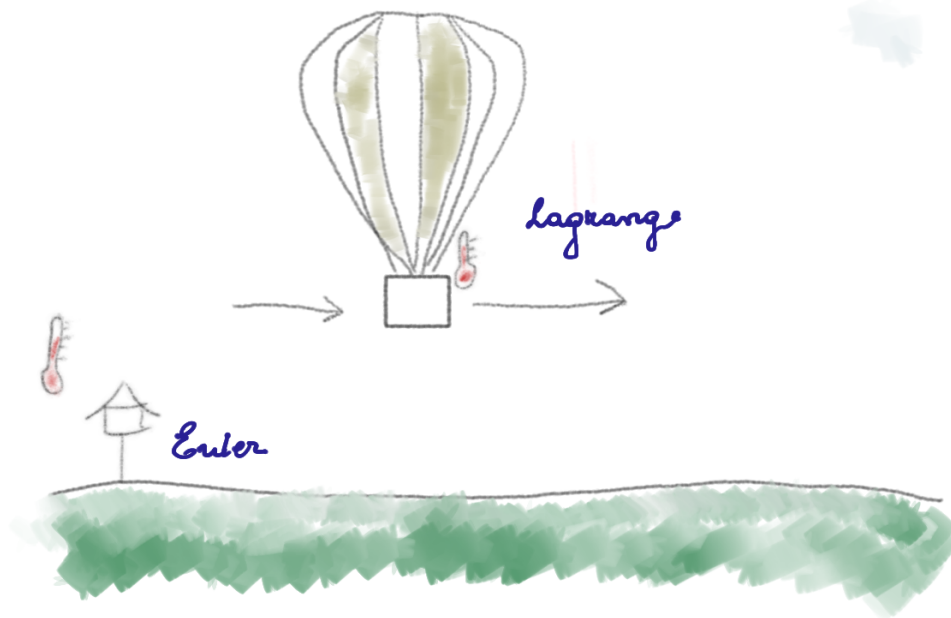


FIG. 1.2 : La dérivée lagrangienne mesure l'évolution des propriétés le long de l'écoulement, au fur et à mesure que la parcelle matérielle subit des transformations physiques. On peut imaginer M. Lagrange mesurant l'évolution de la température dans un montgolfière. La dérivée eulérienne mesure l'évolution du champ à un endroit fixe (par exemple, sur une station météorologique).

- soit les parcelles d'air sont en mouvement et ne subissent pas de transformation physique notable, mais le vent transporte des masses d'air froides vers l'observateur. Celui-ci mesure alors le remplacement d'une masse d'air chaude par une masse d'air froide. La tendance est donc causée par le mouvement ( $\mathbf{u} \neq 0$ ) dans un champ inhomogène ( $\nabla F \neq 0$ ). Le terme d'advection traduit bien ce « venir avec » : le vent amène de nouvelles masses d'air, ce qui est mesuré par l'observateur eulérien.

Nous allons, tout au long du cours, retrouver le concept de particule fluide : un volume élémentaire, formalisé en faisant référence à des infinitésimaux, de masse volume  $\rho$ . Une description lagrangienne du mouvement consiste à analyser le mouvement de ces particules fluides.

### Dérivée matérielle de la position

Montrez que la dérivée matérielle de la position d'une particule fluide n'est autre que sa vitesse :

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{u} \quad (1.8)$$

(Le mieux est de chercher la dérivée matérielle de chacune des trois coordonnées, en se rappelant que les dérivées partielles de coordonnées indépendantes sont nulles, i.e.,  $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$  et  $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$ .)

## 1.4 Volume matériel

Toute la force théorique du concept de dérivée lagrangienne réside dans le fait qu'on peut l'utiliser pour décrire les lois physiques de conservation que nous connaissons déjà. Il en sera ainsi de la conservation de la quantité de mouvement (Ch. 2) et de l'énergie interne (Ch. 8). Commençons par la conservation de la masse.

Soit un volume fini  $V$  de masse  $M$  qui évolue au gré du temps.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t). \quad (1.9)$$

A priori nous notons le volume :  $V(t)$ . Dans le cas particulier où les frontières du volume évoluent selon la vitesse du fluide, nous avons affaire à de volume matériel (il n'est pas nécessairement petit), et nous le noterons de façon spécifique en utilisant une lettre cursive  $\mathcal{V}(t)$ .

Nous voyons apparaître dans l'équation (1.9) une dérivée temporelle d'une intégrale dont les bornes évoluent en fonction du temps. Il faut s'en méfier. C'est un objet que vous avez déjà rencontré lorsque vous avez découvert la relation de Leibniz, mais dans un cas à une dimension :

$$\frac{d}{dt} \int_{b(t)}^{a(t)} F(x, t) dx = \int_{b(t)}^{a(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx + F(a(t), t) \frac{da}{dt} - F(b(t), t) \frac{db}{dt} \quad (1.10)$$

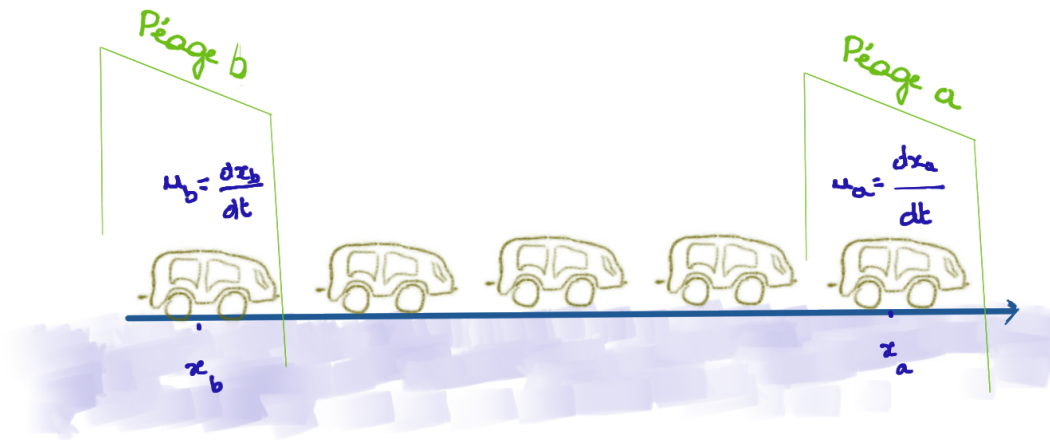


FIG. 1.3

### 1.5 Analogie du trafic routier

Pour pouvoir utiliser sur l'équation de Leibniz telle quelle, nous allons faire l'effort d'imaginer un fluide à une dimension. On pourrait considérer un fin tuyau dans lequel circule un fluide compressible mais nous allons tenter une analogie automobile (Figure 1.3).

Considérons une route droite (que nous mesurerons sur la droite  $\mathbb{R}$ ) qui soutient d'un trafic automobile. Ce qui va tenir lieu de masse volumique est le nombre de véhicules par unité de longueur (disons, par kilomètre). Ce qui tient lieu de "volume matériel" est, dans cette analogie, un convoi de véhicules. Si on veut qu'il soit de "masse constante", on dira simplement que le nombre de véhicules est fixe. Imaginons donc un convoi de, par exemple, cinq véhicules. Le premier véhicule est en position  $x_a(t)$ , et le dernier, en position  $x_b(t)$ .

Reprenons alors l'intégrale de Leibniz. On recherche l'analogie avec un volume matériel, dont les frontières évoluent selon la vitesse du fluide. Dans notre analogie automobile, nous pouvons écrire que les bornes  $a$  et  $b$  de l'intégrale sont les positions  $x_a(t)$  et  $x_b(t)$  des extrémités de notre convoi automobile.  $\frac{dx_a}{dt}$  est la vitesse du véhicule le plus à droite  $u_b(t)$ , et  $\frac{dx_b}{dt}$  celle de celui le plus à gauche.

Substituons à  $F$  la variable  $\rho$ , le nombre de véhicules par unité de longueur.

On a :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_b(t)}^{x_a(t)} \rho(x, t) dx = \int_{x_b(t)}^{x_a(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dx + \rho(x_a(t), t) \frac{dx_a}{dt} - \rho(x_b(t), t) \frac{dx_b}{dt} \quad (1.11)$$

On peut retravailler le dernier terme en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral :/

$$\begin{aligned} \rho(x_a(t), t) \frac{dx_a}{dt} - \rho(x_b(t), t) \frac{dx_b}{dt} &= (\rho u) \Big|_{x_b(t)}^{x_a(t)} \\ &= \int_{x_b(t)}^{x_a(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t) u(x, t)) dx \end{aligned} \quad (1.12)$$

Notre forme intégrale de la conservation de la masse prend donc la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x, t) dx = \int_{x_b(t)}^{x_a(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dx + \int_{x_b(t)}^{x_a(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t) u(x, t)) dx \quad (1.13)$$

Maintenant que nous avons une écriture bien homogène, on peut se permettre de dire que la forme doit être valable *pour tout segment matériel*, donc pour tout segment défini par  $x_b(t)$  et  $x_a(t)$ , et c'est exactement cela que l'on entend lorsqu'on exprime la forme différentielle :

$$\frac{d(\delta M)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t) u(x, t)}{\partial x} \quad (1.14)$$

La seule exigence, pour interpréter cette équation, est que la dérivée temporelle, à gauche, doit s'entendre sur un élément matériel, dont les frontières évoluent avec la vitesse du fluide.

Plaçons nous dans le cas de figure sans doute le plus commun où la masse est conservée. Dans notre analogie, cela implique simplement qu'il n'y a pas de destruction au de génération spontanée de véhicules. Dans ce cas, le membre de gauche s'annule et il reste :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}(x, t) \quad (1.15)$$

C'est l'équation de continuité. Pour aboutir à cette expression nous avons juste du faire une hypothèse de conservation sur l'élément matériel. Maintenant qu'on a fait cette hypothèse, nous pouvons la réintégrer l'expression en fonction de l'espace comme bon nous semble. Cette démarche va aboutir à deux interprétations de l'équation de continuité : une forme eulérienne, et une forme lagrangienne.

- La forme eulérienne d'abord. Pour conserver l'analogie routière, plaçons deux points de péages  $x_a$  et  $x_b$ , cette fois, fixes. On intègre (1.13) et on voit que la variation du nombre de véhicules entre les deux points de péage, par unité de temps, exactement égale au flux de véhicules passant par le péage  $x_a$  (le flux est donné par une densité multipliée par une vitesse), auquel on retranche le flux de véhicules entrant par le péage de gauche  $x_b$ .
- La forme lagrangienne maintenant. Observons que

$$\frac{\partial \rho(x, t) u(x, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}$$

On réassemble l'équation (1.15) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + u \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

Nous retrouvons, dans le membre de gauche, la dérivée lagrangienne sous sa forme 1-D :

$$D_t \rho(x, t) = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

et cette équation se prête à une interprétation toute lagrangienne : la variation de densité d'une particule fluide en mouvement est causée par le mouvement de ses frontières. En effet,  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$  et bien la différence entre la vitesse à droite et à gauche d'une particule 1-D de longueur  $dx$ , qui occuperait la position  $x$ .

### 1.6 Équation de la conservation de la masse (3D)

Nous venons de montrer comment la la dérivée lagrangienne se prête bien pour exprimer une loi de conservation. Dans la suite du cours, nous allons remplacer  $F$  par d'autres propriétés, et progressivement dériver les lois des conservation du moment cinétique (Ch. 2) et de l'énergie (Ch. 8). Avant cela, nous devons faire l'effort de repasser, proprement, à trois dimensions. Les choses peuvent se concevoir de la façon suivante. Le raisonnement qui nous a permis de générer l'équation (1.15) peut se généraliser dans les trois directions de l'espace. Si on a non pas une route bordée de deux points de péage, mais une boîte 3-D, il faut faire le bilan des flux dans la direction Est-Ouest, plus Nord-Sud, plus avant-arrière. On peut prédire que la relation aura la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho v}{\partial y}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho w}{\partial z}(\mathbf{x}, t)\right) = -\nabla \cdot \rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.16)$$

Cette formule est correcte, mais on peut l'obtenir de façon un peu plus formelle en utilisant une généralisation de la relation de Leibniz. Pour un volume fini, la relation (1.10) devient :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV + \iint_{A(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (1.17)$$

La troisième intégrale de l'expression est une intégrale sur la surface qui borde le volume matériel, notée  $\mathcal{A}$ . L'expression  $d\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}$  exprime en produit scalaire entre un vecteur de longueur  $dA$  et orienté perpendiculairement à la surface, et le vecteur vitesse. Il exprime donc le flux à travers  $dA$ . Ainsi, l'intégrale sur  $\mathcal{A}$  est l'équivalent, à 3 dimensions, des deux derniers termes de l'équation (1.10). Elle exprime le flux de  $F$  passant à travers la frontière du volume  $V(t)$ . La surface  $\mathcal{A}$  est souvent notée  $\partial V$  en référence à la notation habituelle en géométrie différentielle.

Si on considère que le volume  $V(t)$  est un volume matériel (fini), alors la vitesse à la frontière  $\mathbf{u}_A$  est égale à la vitesse du fluide. On notera alors simplement  $\mathbf{u}$ . On écrit dès lors

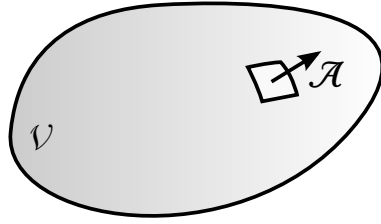


FIG. 1.4 : Volume matériel  $\mathcal{V}$  et un élément de surface  $\mathcal{A}$ , et le vecteur associé pointant vers l'extérieur, perpendiculairement à la surface. C'est ce vecteur qui apparaît dans les équations (1.17) et (1.18).

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV + \iint_{\mathcal{A}(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad (1.18)$$

Cette équation porte le nom de théorème du transport de Reynolds. On peut homogénéiser l'écriture en remplaçant l'intégrale sur la surface par une intégrale, sur le volume, de la divergence (théorème de Gauss) – à nouveau une manipulation similaire à celle déjà effectuée en 1D :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV + \iiint_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot (F(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}) dV$$

Si on prend, comme nous l'avons fait en 1-D,  $F = \rho$ , l'intégrale de gauche est la masse totale du volume matériel, dont la dérivée est nulle si la masse est conservée. Comme la relation est valable pour tout volume matériel, elle se ramène à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.19)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{D\rho}{Dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Aboutissant à une formulation Lagrangienne

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.20)$$

Ces deux équations, 1.19 et 1.20 sont deux expressions équivalentes de la conservation de la masse. Elles portent le nom d'équations de continuité.

### 1.7 Equation de conservation sous formes eulérienne et lagrangienne

Pour généraliser ce résultat, considérons une quantité quelconque  $F$ , qui s'exprime par unité de volume. La source de  $F$ , dans un volume  $\mathcal{V}(t)$ , est l'intégrale  $\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}(t)} F(\mathbf{x}, t) dV$ . Nous l'avons considérée nulle pour la masse ( $F = \rho$ ), mais elle ne l'est pas nécessairement. On obtient donc :

$$\text{source par unité de volume} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}F) \quad (\text{forme eulérienne}) \quad (1.21)$$

Cette équation accepte une interprétation eulérienne : on voit que la source de  $F$  à une position  $\mathbf{x}$  est la somme de la variation eulérienne de  $F$ , plus la divergence qui exprime le flux de  $F$  à travers les frontières de l'élément différentiel autour de  $\mathbf{x}$ .

#### Équations de conservation sous forme eulérienne et lagrangienne

Montrez qu'en combinant les équation (1.21) et (1.19), en notant  $F = \rho f$ . On a

$$\text{source par unité de volume} = \rho \frac{Df}{Dt} \quad (\text{forme lagrangienne}) \quad (1.22)$$

Quelle intuition physique se dégage de l'équivalence entre (1.21) et (1.22)? Quelle est la signification de  $f$ ?

## Chapitre 2

# Equation d'Euler

### 2.1 Théorème de Gauss - Ostrogradsky pour un gradient

Le théorème de Gauss - Ostrogradsky, que nous avons déjà rencontré dans la section 1.6, établit une équivalence entre une intégrale de la divergence sur un volume, et l'intégrale d'un flux pris sur la surface qui borde ce volume :

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} = \iint_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \, dA. \quad (2.1)$$

Si on l'applique au cas particulier d'un champ  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\mathbf{c}$ , où  $f$  est un champ scalaire et  $\mathbf{c}$  un vecteur constant sur le domaine, on obtient :

$$\iiint_V \nabla f \cdot \mathbf{c} = \iiint_V \nabla \cdot (f\mathbf{c}) = \iint_A f\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \, dA.$$

Comme cette équation demeure valable quel que soit  $\mathbf{c}$ , on obtient plus généralement :

$$\iiint_V \nabla f = \iint_A f\mathbf{n} \, dA. \quad (2.2)$$

Cette équation peut être vue comme une généralisation du théorème intégral de Leibniz  $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$ . Le terme de gauche est l'intégrale d'une dérivée (sur la droite dans le cas 1D, dans l'espace dans le cas 3D); le terme de droite est une généralisation de la "différence" de  $f$  évaluée aux bornes du domaine intégré.

## 2.2 Hydrostatique

### 2.2.1 Expression de la seconde loi de Newton

Nous allons dans cette section établir notre première équation du mouvement. C'est l'expression, dans un milieu continu, de la seconde loi de Newton :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Considérons un volume de fluide. Deux types de forces externes peuvent s'exercer sur ce fluide et générer une accélération de son centre de masse :

- les forces qui dérivent d'un potentiel, comme les forces gravitationnelles ou magnétiques, et qui s'expriment comme le gradient d'un potentiel. Ainsi, pour chaque élément de fluide  $\rho dV$ , nous avons une force  $-\rho \nabla \Phi$ . Dans la majorité des cas, le seul potentiel dont on tiendra compte est le géopotential, qui exprime la combinaison de l'attraction terrestre et de la (pseudo-)force centrifuge. Le gradient  $\nabla \Phi$  définit la verticale ;
- les forces qui s'exercent à l'interface du volume et de son environnement. Lorsqu'elles travaillent, ces forces génèrent un transfert de moment cinétique entre l'environnement et le volume considéré.

Nous verrons au chapitre 5 que les forces exercées à l'interface d'un volume et de son environnement se modélisent au moyen d'un tenseur, le tenseur des contraintes. Dans un premier temps, nous allons utiliser un concept plus simple et déjà connu : la pression statique.

Lorsqu'un fluide est à l'équilibre statique, on observe qu'une force s'exerce perpendiculairement sur chaque élément de surface, quelle que soit sa direction. Cette force mesure l'effet macroscopique d'un grand nombre de collisions entre les molécules du fluide et la surface témoin.

Sur cette base, on peut aisément exprimer la première loi de Newton pour établir la relation hydrostatique :

$$\int_V -\rho \nabla \Phi dV - \int_A p \mathbf{n} dA = 0 \quad (2.3)$$

La somme des forces dues au potentiel et à la pression à la surface du volume est égale à zéro dans le cas statique.

En utilisant le théorème de Gauss, on simplifie la relation :

$$\int_V -\rho \nabla \Phi \, dV - \int_V \nabla p \, dV = 0 \quad (2.4)$$

Comme l'expression est valable pour tout volume, on peut la réduire à sa forme différentielle :

$$-\rho \nabla \Phi = \nabla p \quad (2.5)$$

C'est la relation bien connue de l'équilibre hydrostatique.

Si le seul potentiel de force de volume considéré est le géopotiel, alors  $-\nabla \Phi = -g \mathbf{e}_z$  : le gradient du géopotiel est vertical. On remarque que, dans cet équilibre hydrostatique, le gradient de pression sera strictement vertical pour autant que la masse volumique ne varie que selon la verticale, donc selon la pression.

### **Fluide barotrope**

Démontrez que si  $\rho = \rho(p)$ , alors :

$$\nabla p \times \nabla \Phi = 0, \quad (2.6)$$

c'est-à-dire que les isobares — courbes d'égale pression — sont alignées avec les iso-courbes de géopotiel. Le fluide est alors dit barotrope.

#### 2.2.2 Poussée d'Archimède

Considérons un contour  $V$  tracé dans un domaine occupé par le fluide. La poussée d'Archimède est la résultante de toutes les forces de pression s'exerçant sur le contour. Elle vaut, selon l'équilibre hydrostatique établi dans la relation (2.3) :

$$\begin{aligned} - \int_A p \mathbf{n} \, dA &= - \int_V \nabla p \, dV \\ &= \int_V \rho \nabla \Phi \, dV. \end{aligned}$$

Si l'on se rappelle que  $\rho \nabla \Phi \, dV$  est le poids d'un élément de fluide, on trouve que la poussée correspond au poids du volume de fluide qu'elle

encerclé. En particulier, si  $\nabla\Phi = -g\mathbf{e}_z$  est constant, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Poussée} &= - \int_V \rho g \mathbf{e}_z \, dV \\ &= g \mathbf{e}_z \int_V \rho \, dV \\ &= -\mathbf{P}_f = g\rho V, \end{aligned}$$

où, pour la dernière étape, on a en plus supposé que  $\rho$  est constant, et où on a nommé  $\mathbf{P}_f$  le poids du fluide encerclé.

Si à présent on tente l'expérience mentale de remplacer le fluide encerclé par un autre corps, quelle que soit sa densité, la poussée, qui dépend de la pression autour du corps, sera inchangée. Donc la poussée que nous venons de calculer s'applique à la partie submergée de tout corps, quel qu'il soit.

Nous aboutissons au fameux :

### Key Outcome : Principe d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide subit une poussée opposée au poids du volume de fluide déplacé.

Ce qui est somme toute intuitif : en plongeant le corps, on a dû "soulever" une quantité équivalente de fluide.

Intéressons-nous maintenant au moment de force résultant. Quelle que soit l'origine choisie :

$$\text{Moment} = \int_A \mathbf{r} \times (-p\mathbf{n}) \, dA.$$

On peut démontrer que :

$$\int_A p(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \, dA = \int_V \mathbf{r} \times (\nabla p) \, dV.$$

La démonstration est un peu fastidieuse. Elle implique de calculer les composantes de  $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$  une à une. Par exemple, la composante selon  $\mathbf{e}_x$  est  $yn_z - zn_y$ . Si on prend pour fonction  $\mathbf{F}$  (dans (2.1))  $\mathbf{F} = p(y\mathbf{e}_z - z\mathbf{e}_y)$ , on démontre  $\int_A p(yn_z - zn_y) \, dA = \int_V (y\frac{\partial p}{\partial z} - z\frac{\partial p}{\partial y}) \, dV$ . En travaillant composante par composante, on trouve le résultat énoncé. Le résultat, cependant,

est très intuitif : en utilisant la relation hydrostatique  $\nabla p = -\rho \nabla \Phi$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Moment} &= \int_V \rho \mathbf{r} \times (\nabla \Phi) dV \\ &= - \int_V \rho \mathbf{r} dV \times (-\nabla \Phi). \end{aligned}$$

Elle implique que le moment de force exercé par la poussée correspond, en sens opposé, au moment de force associé au poids du fluide déplacé, localisé en  $\mathbf{R}$  tel que  $M\mathbf{R} = \int_V \rho \mathbf{r} dV$  : le centroïde du corps. On peut donc compléter notre principe d'Archimède :

### 🔑 Key Outcome : Principe d'Archimède (complété)

Tout corps plongé dans un fluide subit une poussée opposée au poids du volume de fluide déplacé, et qui s'appliquerait au centroïde du corps (en supposant un fluide de masse volumique constante).

### 🔧 Application : Équilibre des barques

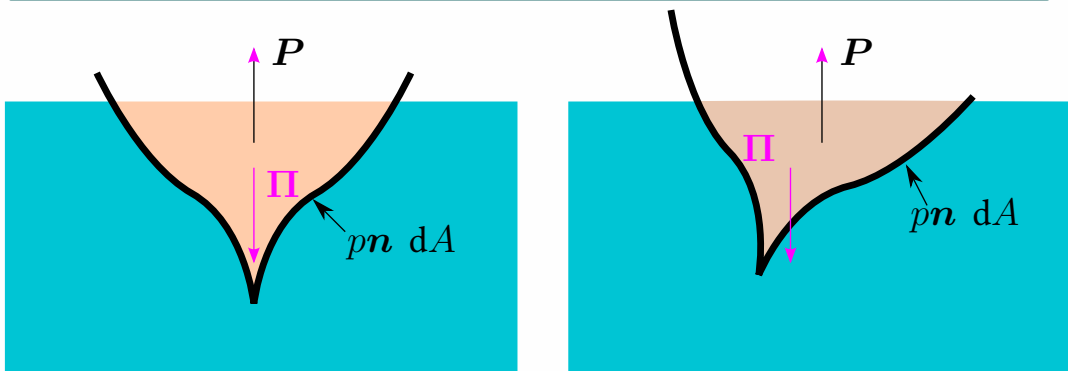


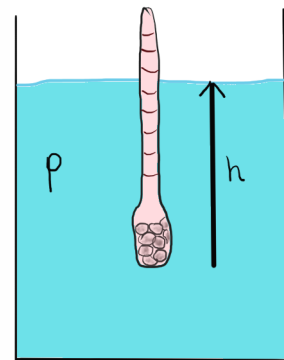
FIG. 2.1 : Les bateaux et barques sont construits de façon à élever le plus possible le centre de poussée (centroïde de la partie immergée), de façon à le placer au-dessus du centre de gravité du bateau, afin d'assurer sa stabilité. Lorsque le bateau s'incline, le moment de force exercé par la poussée et le poids du bateau s'applique de façon à redresser le bateau.

### La fonte de glace de mer

Expliquez pourquoi la fonte de glace de mer ne génère pas de hausse du niveau des mers (mais la fonte des glaciers, si).

### Application : Densitomètre

On trouve une autre application du principe d'Archimède dans le fonctionnement du densitomètre. Il s'agit d'un cylindre lesté, et de masse volumique inférieure à celle du fluide dont on désire mesurer la masse volumique. Comme le fait un bateau, le cylindre s'enfoncera davantage dans un fluide moins dense, le rapport entre la masse du cylindre et le volume immergé donnant la masse volumique du fluide mesuré. Si on écrit le volume immergé comme une fonction (monotone croissante) de la hauteur  $h$  entre la base du cylindre lesté et la surface de liquide, de masse volumique  $\rho$ , et que la masse du densitomètre est notée  $M_d$ , on peut calibrer une relation entre  $h$  et  $\rho$  via la relation  $\rho g V(h) = M_d$ .



### Le profil de pression atmosphérique

On modélise l'atmosphère comme un fluide à masse volumique  $\rho(z)$  soumis à la pesanteur. On suppose que l'air vérifie l'équation d'état des gaz parfaits :

$$P = \rho RT,$$

où  $P$  est la pression,  $\rho$  la masse volumique,  $T$  la température et  $R$  la constante des gaz parfaits pour l'air.

On admet qu'au voisinage du sol la température décroît linéairement avec l'altitude, selon un gradient thermique moyen d'un degré Celsius tous les 180 m :

$$T(z) = T_0 - \frac{z}{180 \text{ m}}.$$

En utilisant l'équilibre hydrostatique et l'équation d'état ci-dessus, établir l'expression du profil vertical de pression atmosphérique  $P(z)$ .

## 2.3 Équation d'Euler

### 2.3.1 Bilan des forces sur un élément matériel

Supposons maintenant que le fluide est suffisamment lent pour que le gradient de pression continue à décrire correctement les forces internes au fluide. En pratique, cela implique qu'il n'y a pas d'effets de compression élastique, ni de friction.

Dans ce cas, nous pouvons généraliser. La variation de la quantité de mouvement du volume matériel fini vaut :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV, \quad (2.7)$$

et doit être égale à la somme des forces externes (les forces internes s'annulant par le principe d'action-réaction). Or, nous avons vu que :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.8)$$

On obtient donc :

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} -\rho \nabla\Phi d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \nabla p d\mathcal{V} \quad (2.9)$$

L'intégrale étant valable pour tout volume matériel fini, on peut la réduire à sa forme différentielle :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla\Phi - \nabla p. \quad (2.10)$$

C'est la célèbre équation d'Euler.

Nous retrouvons ici la pleine puissance de la notion de particule Lagrangienne : un élément infinitésimal de fluide soumis aux équations du mouvement. L'équation (2.10) met en scène une particule matérielle, c'est-à-dire un volume élémentaire de masse volumique  $\rho$ , soumis à la résultante des forces de pression  $-\nabla p$ , et aux forces de volume extérieures  $-\rho\nabla\Phi$ .

### 2.3.2 L'advection de la vitesse génère un tenseur

Nous devons décortiquer l'expression  $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$  pour comprendre ce qu'elle implique. La dérivée matérielle de la vitesse d'une particule fluide correspond à son accélération. Le plus simple est de considérer les composantes selon les trois axes séparément :

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot \mathbf{u}, \\ \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla v \cdot \mathbf{u}, \\ \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla w \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Nous pouvons regrouper ces équations sous une forme vectorielle, en introduisant le gradient du champ de vitesse  $\nabla\mathbf{u}$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\nabla\mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

La notation  $\nabla\mathbf{u}$  peut paraître inhabituelle : vous êtes plus familiers du gradient appliqué à un champ scalaire. Lorsqu'on généralise la notion de gradient à un champ vectoriel, on obtient un tenseur de rang 2.

### 2.3.3 Interprétation physique de l'advection de quantité de mouvement

L'advection peut être interprétée comme le flux de quantité de mouvement transporté par l'écoulement lui-même à travers les parois d'un volume de contrôle fixe. D'un point de vue eulérien, ce terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  agit comme une force apparente qui modifie la vitesse locale en un point donné de l'espace. Dans un écoulement stationnaire, par exemple, cette contribution advective peut contrebalancer exactement un gradient de pression ou une force visqueuse, maintenant ainsi un équilibre dynamique. Inversement, une accélération locale peut être générée sans changement temporel de la vitesse, simplement parce qu'une particule fluide pénètre dans une zone de convergence du champ de vitesse. C'est cette subtilité qui fait de l'advection un générateur de non-linéarité, et qui constitue un élément clé des équations d'Euler. Elle joue un rôle important dans les écoulements les plus complexes, en particulier les écoulements turbulents que nous aborderons dans la section 6.

### 2.3.4 Équation du mouvement sous forme conservative

En travaillant la forme du tenseur d'advection, on peut le réécrire de la façon suivante [ACHESON 2001](#) :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right). \quad (2.11)$$

#### L'équation du mouvement est non-linéaire

Reprenons l'équation d'Euler (2.10). Vérifiez en exercice qu'elle est non-linéaire : la somme de deux solutions n'est généralement pas une solution de l'équation ; une solution multipliée par un facteur constant (autre que 1 ou  $-1$ ) n'est généralement pas une solution. Cette propriété est due au terme d'advection. On peut donc espérer que tant que l'advection est relativement *faible* — c'est une notion qu'il faudra préciser — l'écoulement sera raisonnablement linéaire. Lorsqu'il est plus important, l'écoulement peut devenir turbulent et la recherche d'une solution particulière à l'équation du mouvement n'est généralement plus possible.



## Chapitre 3

# Description du champ de vitesse

### 3.1 Description Eulérienne

#### 3.1.1 Hypothèse de l'écoulement laminaire

Nous allons un instant laisser en suspens les développements de l'équation du mouvement pour aborder la description du champ de vitesse. Considérons un champ de vitesse qui, en toute généralité, dépend du temps :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Tout d'abord, précisons que la notion même d'un champ de vitesse implique que nous pouvons définir, sans ambiguïté, une et une seule vitesse pour une position donnée, à tout moment. Or, nous avons vu que cette approche suppose d'une part une hypothèse de milieu continu, et l'existence de particules matérielles qui sont suffisamment à l'équilibre avec leur environnement pour être considérées comme homogènes. En particulier, nous sommes amenés à appliquer des opérateurs différentiels au champ de vitesse, ce qui exige que le champ de vitesse soit continûment dérivable. Ces hypothèses nous amènent à considérer un écoulement suffisamment régulier que l'on qualifie d'écoulement laminaire, par opposition à l'écoulement turbulent. Les notions que nous allons développer ici supposent un écoulement laminaire.

#### 3.1.2 Lignes de courant

À chaque temps  $t$ , nous pouvons définir un ensemble de courbes paramétriques  $\mathbf{x}_{x_0}$  définies par

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \text{ avec } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.1)$$

Il faut bien comprendre cette écriture car elle est piégeuse. Le paramètre  $s$  est celui qui permet de tracer toute une courbe partant de  $\mathbf{x}_0$ , à un instant  $t$  donné. La courbe est donc tracée en parcourant les valeurs de  $s$  sur la droite réelle, en utilisant le champ  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  à cet instant  $t$  déterminé.

Supposons, pour fixer les idées, que le champ  $\mathbf{u}$  soit invariant au cours du temps. Il s'agit donc d'un écoulement stationnaire. Réécrivons dans ce cas particulier :

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \text{ avec } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Si on remplace, pour s'aider, le symbole  $s$  par le symbole  $t$ , on voit immédiatement que la courbe  $\mathbf{x}(s)$  répond à la même équation que celle qui détermine le chemin d'une particule de fluide au cours du temps, avec condition initiale  $\mathbf{x}_0$  au temps  $t = 0$ . La courbe paramétrique définie par (3.1) porte le nom de ligne de courant. Dans le cas particulier d'un champ de vitesse stationnaire, elle se superpose à la trajectoire ou chemin de toute particule passant à un moment donné par  $\mathbf{x}_0$ . Nous reviendrons sur cette distinction, mais soulignons dès à présent que la ligne de courant est toujours définie, même en régime non stationnaire.

 **Key Outcome : Les lignes de courant sont tangentes à la vitesse en tout point**

Exprimons l'équation (3.1) selon ses composantes cartésiennes :

$$\frac{dx}{ds} = u(\mathbf{x}, t) \qquad \frac{dy}{ds} = v(\mathbf{x}, t) \qquad \frac{dz}{ds} = w(\mathbf{x}, t)$$

On peut exprimer les incréments différentiels :

$$dx = u(\mathbf{x}, t) ds \qquad dy = v(\mathbf{x}, t) ds \qquad dz = w(\mathbf{x}, t) ds.$$

Ou encore :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u(\mathbf{x}, t)}{v(\mathbf{x}, t)} \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{u(\mathbf{x}, t)}{w(\mathbf{x}, t)} \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{v(\mathbf{x}, t)}{w(\mathbf{x}, t)}$$

ce qui revient simplement à écrire que la courbe décrite par  $\mathbf{x}(s)$  est tangente, en tout point, au vecteur vitesse.

 **Key Outcome : Les lignes de courant ne peuvent se croiser que si la vitesse y est nulle**

Par l'absurde, cela impliquerait en effet qu'en un point et à un instant  $t$ , la vitesse peut prendre deux directions différentes, alors que l'hypothèse du milieu continu nous impose une vitesse bien définie en tout point.

Le cas de vitesse nulle est particulier : une particule de fluide n'atteindra jamais le point de vitesse nulle dans un écoulement stationnaire. Ces points sont des points de stagnation.

### 3.1.3 Section de lignes de courant dans un écoulement

Pour un champ de vitesse bidimensionnel  $\mathbf{u}(x, y)$ , considérons un ensemble de conditions initiales  $S_{ab}(0)$  reliant deux points  $a$  et  $b$  de façon continue, et tel qu'il intercepte les lignes de courant de manière à ce que les vitesses soient toutes dans la même direction (par exemple, de gauche à droite). On dit que  $S_{ab}(0)$  constitue une *section*, et plus précisément une section connexe, car elle ne contient pas de trou. En construisant l'ensemble des lignes de courant associées à chacune de ces conditions initiales, on obtient une figure géométrique généralement bidimensionnelle. Pour tout paramètre  $s$  (le temps restant figé), les ensembles  $S_{ab}(s)$  constituent des sections correspondant à la projection continue des conditions initiales en fonction de  $s$ . Cette surface ainsi construite ne contiendra pas de trou non plus. Pour le voir, introduisons la notion de fonction de flot, notée  $\phi^s$ , qui renvoie l'advection de la section initiale selon les lignes de courant :

$$\phi^s(S_{ab}(0)) = S_{ab}(s) \quad (3.2)$$

Par conséquent, l'advection d'une section connexe par un flot continu reste connexe : **aucun trou n'est créé.**

### 3.1.4 Écoulement tri-dimensionnel : tubes de courant

Pour un champ de vitesse tridimensionnel  $\mathbf{u}(x, y, z)$ , nous pouvons définir un anneau  $C_{ab}(0)$ , c'est-à-dire une courbe fermée, dite *simplement connexe*.

L'advection de cette courbe selon le flot  $\phi^s$  définit alors un tube de courant (Figure 3.1), dont la paroi est continue.

On appelle *tube de courant* la surface formée par l'ensemble des lignes de courant issues d'une courbe fermée  $\partial S(0)$  dans un champ de vitesse  $\mathbf{u}(x, y, z)$ . Autrement dit, si chaque point de  $\partial S(0)$  est advecté selon le flot  $\phi^s$ , la surface latérale engendrée par l'ensemble des trajectoires forme un tube dont les lignes de courant constituent la paroi.

Les propriétés topologiques du flot garantissent la continuité de la paroi du tube : aucune ligne de courant ne traverse cette paroi, et donc aucun échange de matière ne se produit entre l'intérieur et l'extérieur du tube. De manière informelle, aucune ligne de courant ne peut s'échapper du tube : toutes restent confinées à l'intérieur de sa paroi.

**Key Outcome : Conservation du débit massique en régime stationnaire**

En régime stationnaire, la masse  $M$  du fluide contenu dans un tube de courant est constante au cours du temps. Autrement dit, la dérivée temporelle de la masse du tube est nulle :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 0.$$

Considérons deux sections transversales  $S_1$  et  $S_2$  du tube de courant, de normales respectives  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  orientées vers l'extérieur du volume délimité par ces sections (voir Figure 3.1). Le bilan de masse entre ces deux sections s'écrit :

$$\int_{S_1} \rho \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{n}_1) \, dS + \int_{S_2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS = 0,$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide. Les signes des normales reflètent le sens conventionnel du débit (entrant par  $S_1$  et sortant par  $S_2$ ).

En notant  $Q_m = \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$  le débit massique à travers une section  $S$ , cette équation se simplifie en :

$$Q_{m,1} = Q_{m,2}.$$

Ainsi, le débit massique est constant le long du tube de courant en régime stationnaire. Cette propriété est fondamentale pour l'étude des écoulements, et plus particulièrement les écoulements incompressibles car il permet, par exemple, de relier les vitesses moyennes dans des sections de tailles différentes.

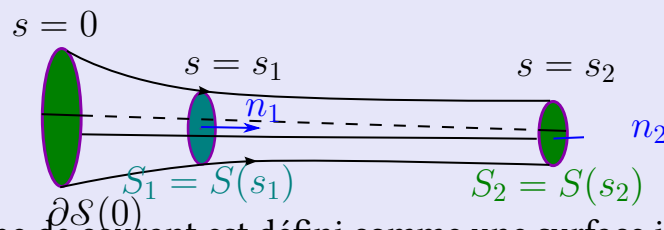


FIG. 3.1 : Le tube de courant est défini comme une surface imaginaire obtenue par l'ensemble continu de lignes de courant générées à partir d'une courbe fermée  $S_{ab}(0)$ . Les sections  $S_1$  et  $S_2$  illustrent les surfaces utilisées pour le bilan de masse.

### 3.1.5 Écoulements bi-dimensionnels

Bien que nous vivions dans un monde tri-dimensionnel, beaucoup d'écoulements se décrivent très bien dans un espace à deux dimensions : les éléments de l'écoulement qui nous intéressent se trouvent dans un plan. Ce sera typiquement le cas lorsque l'écoulement est confiné dans un domaine qui présente des dimensions très différentes selon l'horizontale et la verticale. C'est le cas des mers, des océans, ou dans certaines expériences de laboratoire comme celle de Rayleigh-Bénard<sup>1</sup>. De tels écoulements sont dits à coefficient d'aspect élevé. L'existence d'écoulements à coefficient d'aspect élevé est elle-même liée à des facteurs extérieurs qui renforcent la pertinence d'une description à deux dimensions : la force de gravité induit une forte asymétrie entre l'horizontale et la verticale. On démontre par ailleurs que dans un fluide stationnaire barotrope en rotation (section Deleersnijder), le mouvement est invariant selon l'axe de rotation (théorème de Taylor-Proudman). Nous utiliserons la notation  $\mathbf{u}_h$  pour signifier la composante horizontale du mouvement.

### 3.1.6 Écoulements 2-D typiques

On peut appréhender le monde bi-dimensionnel en se familiarisant avec des écoulements typiques.

**Écoulement de translation** Il s'agit d'un écoulement trivial,  $\mathbf{u}_h = \mathbf{c}$ .

**Écoulement divergent** On peut modéliser un écoulement globalement divergent par  $\mathbf{u}_h = c\mathbf{r}_h$ , où  $\mathbf{r}_h$  est la composante horizontale du vecteur position, depuis l'origine. On vérifie (exercice) que  $\nabla \cdot \mathbf{u}_h$  vaut dans ce cas  $2c$ , le facteur 2 étant associé aux deux dimensions de l'écoulement. Cet écoulement implique une divergence sur tout le champ et des vitesses croissant indéfiniment au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre. On peut localiser la structure divergente et lui donner une dimension typique  $L$  en imposant :  $\mathbf{u}_h = ce^{-r_h/L}\mathbf{r}_h$ . On vérifie aussi que ces écoulements sont irrotationnels.

<sup>1</sup><https://www.youtube.com/watch?v=Eud7uG5JHng>

**Rotation solide** Par analogie à l'écoulement divergent, on modélise un écoulement rotationnel par  $\mathbf{u}_h = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_h$ .

En coordonnées polaires, cet écoulement s'écrit simplement :

$$u_\theta = \Omega r$$

Dans l'écoulement 2-D, le vecteur  $\boldsymbol{\Omega}$  qui induit la rotation est orthogonal au plan de l'écoulement. On retrouve le vecteur instantané de rotation (la vorticité) en appliquant l'opérateur rotationnel :  $\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{u}_h = 2\boldsymbol{\Omega}$ .

On note la composante verticale de vorticité

$$\omega_z = 2\Omega$$

Ce modèle de rotation solide implique des vitesses croissant indéfiniment à mesure que l'on s'éloigne de l'origine.

**Vortex irrotationnel** Il est possible de créer un flux circulaire qui est non-rotationnel presque partout !

Considérons le mouvement dans le plan, en coordonnées polaires :

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Cette fois, la vitesse angulaire de rotation n'est plus constante : elle diminue selon une loi de proportionnalité inverse.

Pour calculer le rotationnel, on peut utiliser son expression en coordonnées polaires (seule la composante verticale est non-nulle, puisqu'il s'agit d'un mouvement dans le plan) :

$$\zeta_z = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

Si on applique le théorème de la circulation :

$$\oint u_\theta r \, d\theta = \Gamma = \iint \omega_z \, dA$$

La vorticité est donc nulle partout, sauf au centre où elle se comporte comme un pic de Dirac.

Bien que ce type de vortex semble tiré par les cheveux, il est en fait très courant car il permet de créer une circulation tout en étant irrotationnel presque partout.

**Vortex exponentiel** Si l'on applique un facteur exponentiel décroissant, on génère une rotation différentielle typique d'un vortex.

$$\mathbf{u}_h = e^{-r_h/L} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_h$$

On vérifie que cet écoulement est non-divergent.

**Cisaillement** Le cisaillement  $\mathbf{u}_h = (0, Lx)$  constitue un autre exemple d'écoulement rotationnel, non-divergent (plus généralement, toute forme  $(g(y), f(x))$  sera non-divergente).

### 3.1.7 Potentiels scalaires et vecteurs

Reprenons la décomposition de Helmholtz, mais adaptée au cas bi-dimensionnel. Le potentiel scalaire  $\phi$  est défini dans le plan et on ne prend que son gradient horizontal. Le potentiel vectoriel  $\boldsymbol{\psi}$  est un principe à trois dimensions. On peut manipuler l'opérateur rotationnel pour extraire trois composantes :

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\psi} &= \nabla \times (\psi_x \mathbf{e}_x + \psi_y \mathbf{e}_y + \psi_z \mathbf{e}_z) \\ &= \nabla \psi_x \times \mathbf{e}_x + \nabla \psi_y \times \mathbf{e}_y + \nabla \psi_z \times \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.3)$$

Chaque composante produit un champ vectoriel dans les trois plans orthogonaux aux vecteurs de base. Si on considère un écoulement horizontal, dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , alors il ne faut retenir que le troisième terme.

### 3.1.8 Écoulement bi-dimensionnel stationnaire incompressible

#### 3.1.8.1 Fonction de courant

Si le flux est non-divergent  $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0$  soit, en développant

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

où l'on a posé  $\mathbf{u}_h = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$ . Cette équation est automatiquement rencontrée si  $\mathbf{u}_h$  dérive d'un potentiel vecteur. Soit :  $\mathbf{u}_h = \nabla \times (\psi_z \mathbf{e}_z) = \nabla \psi_z \times \mathbf{e}_z$ , on a :

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi_z}{\partial x}.$$

### 3.2. DESCRIPTION LAGRANGIENNE D'UN ÉCOULEMENT NON-STATIONNAIRE 43

L'équation de continuité est satisfaite par  $\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x y^2} = \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y x^2}$ .

La fonction  $\psi_z$  porte le nom de fonction de courant, en anglais *streamfunction*, pour les deux raisons suivantes :

**Key Outcome : Le flux entre deux points est donné par la différence de la fonction de courant entre ces deux points**

Sous l'hypothèse d'une masse volumique  $\rho$  constante, le flux à travers une section  $\mathcal{S}$  quelconque entre deux points vaut

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{S} &= \rho \int_a^b \mathbf{u}_h \cdot (dy, -dx) \\ &= \int_a^b \frac{\partial \psi_z}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} dx \\ &= \psi_z(b) - \psi_z(a). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

**Key Outcome : Dans un fluide stationnaire, une particule fluide conserve  $\psi_z$  le long de son mouvement.**

En effet, puisque  $\frac{\partial \psi_z}{\partial t} = 0$  (hypothèse stationnaire),

$$D\psi_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial x} Dx + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} Dy.$$

Ainsi, dans un écoulement bi-dimensionnel incompressible, les iso-contours de la fonction de courant sont des lignes de courant. Dans ces conditions, deux iso-contours bordent et "piègent" le flux qui ne peut jamais les croiser. La différence entre les valeurs prises par la fonction de courant indique (à un facteur  $\rho$  près) le flux de masse entre les deux iso-contours.

### 3.2 Description Lagrangienne d'un écoulement non-stationnaire

Nous devons introduire deux nouvelles notions, qui traduisent toutes deux la description lagrangienne du champ de vitesse.

### 3.2.1 Ligne de chemin

La ligne de chemin (*pathline*) est la courbe paramétrique décrivant la trajectoire d'une particule fluide dans un champ de vitesse, possiblement non stationnaire. Elle est définie par :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{p}, t), \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0. \quad (3.4)$$

On peut également l'exprimer à l'aide de la fonction de flot. Dans sa version non-stationnaire, la fonction flot est indexée par deux paramètres, le temps initial ( $t_0$ ) et le temps cible ( $t$ ), et exprime l'advection d'un domaine pris au temps  $t_0$ , tel qu'il apparaît au temps  $t$ .

$$\mathbf{p}(t) = \phi^{t_0, t}(\mathbf{x}_0), \quad (3.5)$$

Le paramètre de la courbe est  $t$ . Chaque ligne de chemin correspond donc à la trajectoire d'une particule donnée, définie par sa position initiale  $\mathbf{x}_0$  et son temps initial  $t_0$ . À chaque instant  $t$ , la tangente à la ligne de chemin coïncide avec la direction du champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  en ce point. Dans un écoulement laminaire, deux particules lâchées au même instant  $t_0$  ne peuvent jamais se collisionner : une telle collision impliquerait qu'en un même point et à un même instant, deux vitesses différentes sont possibles, ce qui contredirait l'hypothèse de continuité du milieu. En revanche, deux lignes de chemins associées à des temps initiaux différents peuvent très bien se croiser. La ligne de chemin peut donc être interprétée comme une courbe qui se construit dynamiquement au fur et à mesure de l'évolution du temps.

### 3.2.2 Ligne de trace (streakline)

La ligne de trace (*streakline*) est définie à un instant donné  $t$  comme l'ensemble des positions atteintes à cet instant par des particules lâchées à différents instants  $t_0$ , mais depuis une même position initiale  $\mathbf{x}_0$ . Autrement dit, le paramètre qui permet de se déplacer le long de la courbe est le temps de lâcher  $t_0$ . En reprenant le formalisme du flot, on écrit :

$$\mathbf{s}(t_0) = \phi^{t_0, t}(\mathbf{x}_0), \quad (3.6)$$

Le paramètre de la courbe est cette fois  $t_0$ , et non  $t$ . En parcourant la courbe, on explore les positions actuelles des particules émises successivement depuis la source  $\mathbf{x}_0$  à différents instants passés.

### 3.2. DESCRIPTION LAGRANGIENNE D'UN ÉCOULEMENT NON-STATIONNAIRE 45

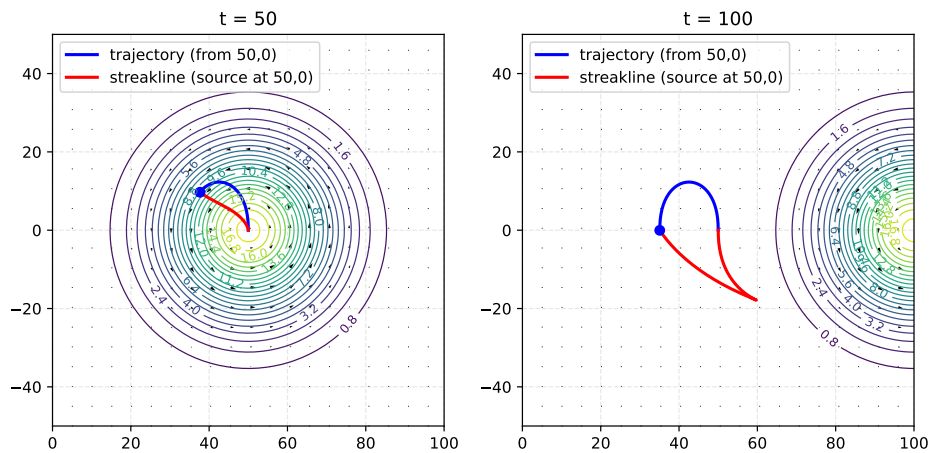


FIG. 3.2 : Illustration des lignes de courant (traits pleins), trajectoire (bleue) et ligne de trace (rouge) pour un vortex se déplaçant de gauche à droite. Code interactif sur [https://mybinder.org/v2/gh/mcrucifix/lphys1213/main?labpath=IPynb/01\\_vortex\\_streamlines.ipynb](https://mybinder.org/v2/gh/mcrucifix/lphys1213/main?labpath=IPynb/01_vortex_streamlines.ipynb)

Ainsi, dans un écoulement non stationnaire, les lignes de courant, les lignes de chemin et les lignes de trace ne coïncident pas nécessairement : chacune décrit un aspect distinct du mouvement du fluide.



## Chapitre 4

# Écoulements incompressibles et irrotationnels non visqueux

Si la masse volumique  $\rho$  est une constante du mouvement, alors par l'équation de continuité (1.15), le champ de vitesse est non-divergent

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ pour un écoulement incompressible} \quad (4.1)$$

### 4.1 Théorème de Bernoulli

Plaçons nous dans les conditions du chapitre 2 : écoulement laminaire, non-visqueux, dans lequel la seule force interne est la force de pression telle que nous l'avons définie pour établir l'équation d'Euler.

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \Phi - \nabla p. \quad (4.2)$$

Nous utilisons deux hypothèses supplémentaires : l'écoulement est stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) et incompressible. On utilise par ailleurs la forme alternative du tenseur d'advection (eq : 2.11) :

$$\rho(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = -\rho \nabla \Phi - \nabla p. \quad (4.3)$$

Comme  $\rho$  est constant et non-nul, nous pouvons nous autoriser à diviser tous les termes par  $\rho$  et l'introduire sous la dérivée spatiale :

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right) \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla H \quad (4.4)$$

La quantité  $H$  a les dimensions d'une énergie massique, et on y reconnaît les termes évoquant une énergie cinétique par unité de masse, le géopotential, et la pression. L'ensemble forme une quantité conservée le long du mouvement. En effet :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)H = \mathbf{u} \cdot ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}) = 0 \quad (4.5)$$

### Key Outcome : Théorème de Bernouilli

Si un fluide idéal est en écoulement stationnaire, alors  $H$  est constant le long d'une ligne de courant (ACHESON 2001, p. 10).

## 4.2 Équation de la vorticité

Reprenons l'équation de Bernouilli dans sa version non-stationnaire :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla H \quad (4.6)$$

Nous définissons la vorticité comme le rotationnel de la vitesse (cf. ch. 2, section 3.1.6) :  $\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{u}$ . En prenant le rotationnel de part et d'autre de l'équation de Bernouilli on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0, \quad (4.7)$$

car le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

On utilise les identités connues en calculus pour développer le rotationnel du produit vectoriel :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (4.8)$$

Si l'écoulement est non-divergent,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  et de plus  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}$  est toujours nul par construction de la vorticité. On trouve :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

ou encore

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (4.9)$$

C'est l'équation de la vorticité écrite ici pour un écoulement incompressible. Il est remarquable que la vorticité évolue, le long de l'écoulement, indépendamment de la pression et du géopotential !

dire qu'elle exprime la conservation du moment angulaire. Sans moment de force externe, pas de génération de vorticité nette à l'intérieur du fluide.

Plus fort encore, si l'écoulement est bi-dimensionnel (par exemple, dans le plan  $x, y$ , alors  $\boldsymbol{\omega} = \omega e_z$  et

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0. \quad (4.10)$$

Cette équation justifie l'existence de particules de vorticité. Les 'petits' vortex sont advect  s avec le flux moyen, comme s'il s'agissait de particules dans un champ 2D.

Si, d'autre part, l'écoulement est tri-dimensionnel, laminaire est stable, avec une vorticité nulle en condition initiale  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , aucune vorticité ne sera cr  e. Reprenons alors l'équation (4.3) qui nous a servi à établir le théorème de Bernouilli :

$$\rho(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) = -\rho \nabla\Phi - \nabla p.$$

Comme  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ , on a

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) = -\nabla\Phi - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Ceci nous donne un "Bernouilli plus" : si le flot est non-rotationnel, alors la quantité  $H$  est constante, non-seulement le long d'une ligne de courant, mais absolument partout dans le fluide.

### Key Outcome : Bernoulli PLUS

Dans un fluide parfait, irrotationnel, la quantité  $\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$  est constante

### Application : Écoulement libre non-turbulent

Soit une cuve à l'air libre et un orifice au bas de la cuve, également à pression atmosphérique : la vitesse du fluide en sortie est alors directement déterminée par la différence d'énergie potentielle :  $\Delta u^2/2 = -\Delta\Phi$ .

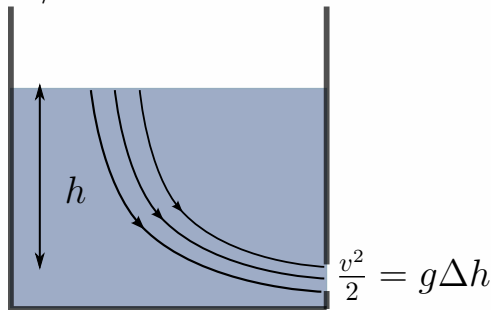


FIG. 4.1 : Schéma de la cuve et de l'écoulement libre non-turbulent à travers l'orifice.

On évoque souvent l'effet Magnus ou encore la portance d'une aile d'avion comme application du théorème de Bernoulli.

Le raisonnement est qu'à géopotentiel égal, le long d'une ligne de flux, la pression diminue quand la vitesse augmente. Si la vitesse *au dessus* de l'aile d'avion est plus grande qu'en dessous, alors la différence de pression associée au théorème de Bernoulli génère une portance.

L'effet Magnus porte sur un objet en rotation (par exemple un ballon). Ici encore, si l'on peut prouver que la vitesse du fluide diffère de part et d'autre du ballon, on explique une force résultante.

Cependant, il n'est pas trivial de prouver cette différence de vitesse. Nous allons esquisser le raisonnement formel et ensuite réexaminer le cas du ballon (d'abord) et de l'aile d'avion ensuite.

### 4.3 Équation de Laplace complexe et conditions de Cauchy-Rieman

#### 4.3.1 Écoulement potentiel complexe

Plaçons-nous dans le cas particulier d'un écoulement bi-dimensionnel. Nous avons vu dans la section 3.1.8.1 que si la vitesse dérive d'une fonction de courant,  $\mathbf{u}_h = \nabla \times \psi \mathbf{e}_z$ , alors l'équation de continuité est automatiquement satisfaite.

Si, par ailleurs, le flux  $\mathbf{u}_h$  dérive d'un potentiel scalaire  $\phi$  définit tel que :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

il est automatiquement irrotationnel. Ainsi, si un écoulement dérive à la fois d'une fonction de courant et d'un potentiel scalaire, il est à la fois irrotationnel *et* incompressible.

Ainsi, si on applique la condition de non-divergence à l'expression dérivée de la fonction de courant, on a  $\nabla^2 \psi = 0$ , et la condition de champ irrotationnel à l'expression dérivée du potentiel scalaire :  $\nabla^2 \phi = 0$ . Il s'agit de deux équations de Laplace, qui peuvent aussi s'exprimer en coordonnées polaires :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4.11)$$

Pour qu'un écoulement puisse dériver à la fois d'un potentiel scalaire et d'une fonction de courant, il faut que les vitesses associées aux deux définitions soient identiques, soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Ces équations sont l'expression des conditions de Cauchy-Riemann, qui garantissent l'existence d'une dérivée spatiale à la quantité complexe  $\Psi = \phi + i\psi$  (cf. e.g. ARFKEN et WEBER 2001, sect. 6.2, p. 399).

Ainsi, si l'on exprime la position avec une variable complexe  $z = x + iy$ , une fonction est qualifiée de fonction analytique lorsque sa dérivée spatiale ne dépend pas de l'orientation de l'incrément. Concrètement ( $\delta z = \delta x + i\delta y$ )

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dz} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta\Psi}{\delta x} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi + i\psi}{\partial x} \\ &= \lim_{i\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta\Psi}{i\delta y} = -i \frac{\partial\Psi}{\partial y} = -i \frac{\partial\phi + i\psi}{\partial y},\end{aligned}$$

On vérifie que les deux expressions sont équivalentes et satisfont :

$$\frac{d\Psi}{dz} = u - iv$$

Nous aboutissons donc à un résultat remarquable et fondamental

 **Key Outcome : Condition suffisante pour un écoulement potentiel**

toute fonction qui soit au moins deux fois dérivable dans le plan complexe, satisfait les équations de Laplace dans le plan complexe.

Ce résultat nous permet de construire quelques écoulements types qui vont nous servir pour construire des écoulements satisfaisant à des conditions frontières et de symétrie spécifiques.

#### 4.3.2 Écoulements complexes potentiels type

**Écoulement constant** L'écoulement associé à  $\Psi = Uz$  a pour vitesse  $Ue_x$ .

**Source** On génère une source ponctuelle d'amplitude  $m$  avec le champ potentiel

$$U = \frac{m}{2\pi} \ln z.$$

Le logarithme complexe  $z$  peut s'estimer en écrivant  $z$  sous la forme d'un phasor complexe  $z = re^{i\theta}$ . On voit alors que

$$\ln z = \ln(re^{i(\theta+2\pi k)}) = \underbrace{\ln r}_{\phi} + i \underbrace{\theta + 2\pi k}_{\psi}.$$

### 4.3. ÉQUATION DE LAPLACE COMPLEXE ET CONDITIONS DE CAUCHY-RIEMAN 53

Attention cependant : l'angle n'est défini qu'à un terme  $2\pi k$  près, et c'est crucial.

On vérifie qu'il s'agit d'un champ symétrique autour de l'origine, tel que pour tout contour autour de l'origine, le flux net s'échappant du contour est  $m$ . L'écoulement est donc non-divergent et irrotationnel en tout point, sauf à l'origine où une singularité permet la "création" d'un fluide (source ponctuelle).

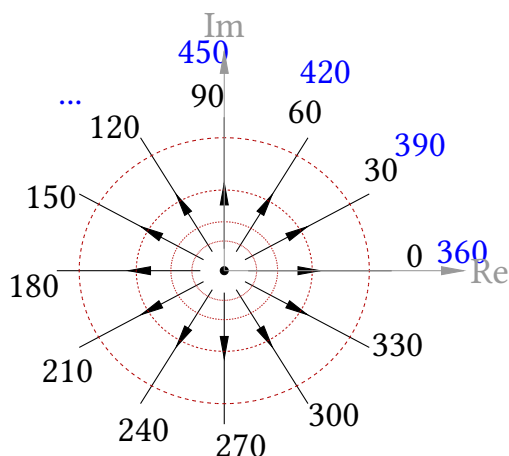


FIG. 4.2 : Potentiel d'écoulement généré par une unique source (débit massique positif). Les lignes de courant (streamlines) sont indiquées par des traits pleins et représentent la fonction de courant  $\psi$  (Streamfunction). Les lignes de potentiel de vitesse (équipotentiels) sont tracées en rouge tireté et représentent le potentiel de vitesse  $\phi$ .

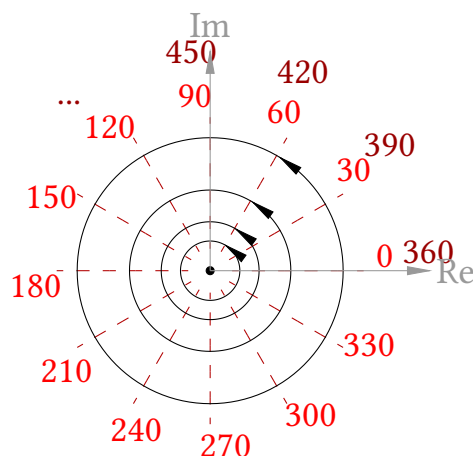


FIG. 4.3 : Potentiel d'écoulement généré par une unique circulation (vortex ponctuel). Les lignes de courant sont indiquées par des traits pleins ( $\psi$ ). Les lignes de potentiel de vitesse (équipotentiels) sont tracées en rouge tireté ( $\phi$ ) et sont ici explicitement étiquetées pour identification, mais exprimées en degrés. .

Sur la figure 4.2, on repère les lignes de courant en trait plein. On se rappelle que le débit volumique est donné par la différence entre deux valeurs de la fonction de courant. C'est ici que le terme  $2\pi k$  est important, et crée une ambiguïté sur la valeur de la fonction de courant.  $k$  doit être choisi de façon à ne pas créer d'anomalie lorsqu'on passe de 359 à 360 degrés. Cela explicite le fait que la fonction  $\ln z$  n'est pas définie de façon unique sur

tout le domaine. Ce qui est défini est sa différence entre deux points du domaine (c'est un cas de spirale de Riemann).

**Vortex ponctuel** Nous avons déjà rencontré le vortex ponctuel, de circulation  $\Gamma$ , dans la section . Il répond au potentiel complexe

$$U = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (4.13)$$

Il génère un diagramme similaire à celui de la source ponctuelle (Figure 4.3, mais les rôles de la fonction de courant et du potentiel de vitesse sont échangés, avec la même attention à apporter à l'ambiguïté de la valeur, cette fois, du potentiel de vitesse.

Nous allons voir comment utiliser la puissance des potentiels complexes pour trouver des solutions d'écoulements dans des cas particuliers.

#### 4.3.3 Écoulement autour d'un cylindre (sans circulation)

Considérons un écoulement horizontal laminaire, de vitesse  $U$ . Nous savons qu'il répond au potentiel complexe  $Uz$ .

Nous exigeons maintenant qu'il contourne un cylindre de rayon  $R$  placé à l'origine. Le potentiel doit donc être adapté en appliquant une perturbation dont la forme doit répondre à des exigences de symmetries :

- elle implique la seule dimension  $R$
- symétrique par rapport à l'origine
- s'annule loin du centre

La perturbation doit par ailleurs être telle que la partie imaginaire du potentiel complexe s'annule (ou soit constante) à la frontière du cylindre. Cela va générer par construction une ligne de courant tout au long du cylindre, qui interdit tout flux à travers la paroi du cylindre.

La fonction  $\Psi(z) = U(z + \frac{R^2}{z})$  respecte toutes ces conditions<sup>1</sup>. Elle présente une singularité en 0 mais comme c'est à l'intérieur du cylindre l'écoulement reste bien défini dans tout le domaine.

<sup>1</sup>La technique particulière pour générer cette solution dépasse la portée de ce cours. On réalise une transformation "conforme" selon laquelle un disque infiniment aplati est continûment amené à sa forme finale.

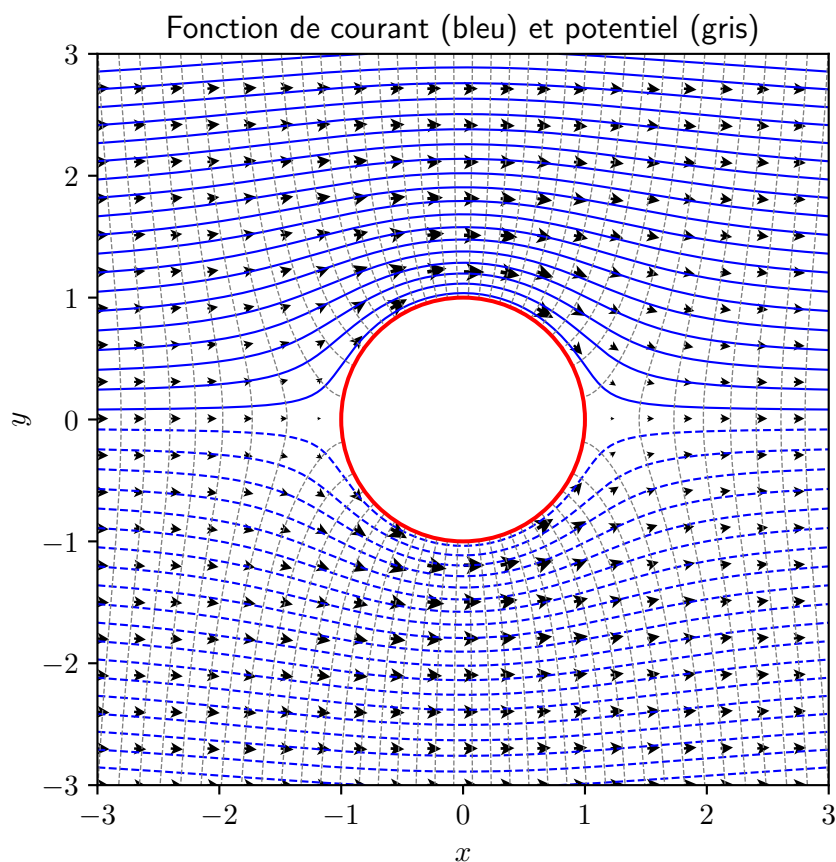


FIG. 4.4 : Fonction de courant (traits pleins) et lignes de potentiel de vitesse (pontillés) pour un fluide parfait rencontrant un obstacle cylindrique, en l'absence de circulation autour de l'obstacle ( $\Psi(z) = U(z + \frac{R^2}{z})$ )

Les composantes horizontales et verticales de la vitesse sont fournies par les parties réelles et imaginaires de la dérivée de  $\Psi(z)$  :

$$u - iv = U \left( 1 - \frac{R^2}{zz} \right) = U \left( 1 - R^2 \frac{z^{*2}}{|z|^4} \right) = U \left( 1 - R^2 \frac{(x^2 - y^2 - 2ixy)}{r^4} \right) \quad (4.14)$$

On trouve deux points de stagnation (vitesse nulle) sur l'axe  $y = 0$ , pour  $x \pm R$ .

Fonctions de courant et potentiel pour différentes circulations

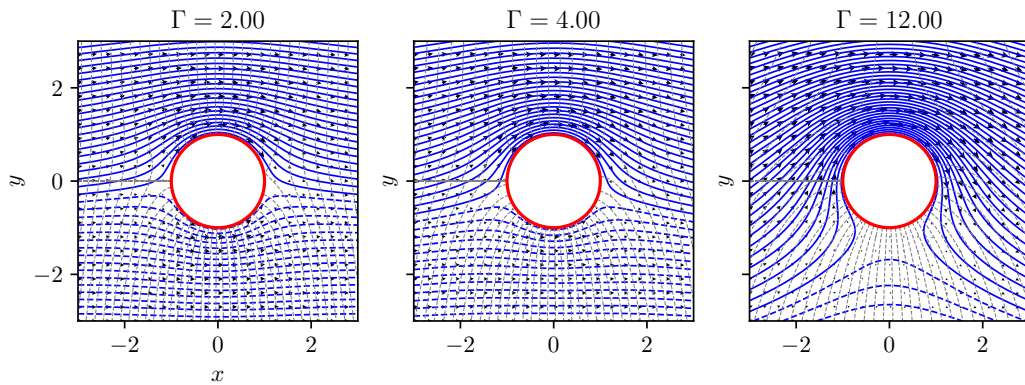


FIG. 4.5

#### 4.4 Analyse de l'écoulement autour d'un cylindre avec circulation

Si l'on ajoute une vortex ponctuel ((4.13)) à la solution  $\Psi(z) = U(z + \frac{R^2}{z})$ , cette dernière conserve toutes les propriétés voulues : fonction de courant constante autour de l'obstacle, solution convergeant vers  $Uz$  à l'infini (la vitesse du vortex ponctuel tend vers 0 loin de la source).

On peut étudier la position des points de stagnation dans ces conditions, comme illustré sur la figure 4.5. Bien que l'analyse algébrique ne soit pas excessivement complexe, nous n'en fournissons ici que les conclusions. Pour  $\Gamma > 0$ , les deux points de stagnation, initialement situés de part et d'autre du cylindre lorsque  $\Gamma = 0$ , migrent progressivement vers le bas. Ils finissent par se rencontrer et se détachent du cylindre dès que  $\Gamma$  dépasse  $4\pi UR$ .

Bien qu'il y ait une circulation, l'écoulement, dans tout son domaine, demeure irrotationnel et incompressible. Il respecte ainsi toutes les conditions du théorème de Bernoulli généralisé. Nous savons donc qu'en tout point,

$$\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u_h^2}{2} \text{ est constant,}$$

où nous utilisons la notation  $u_h$  pour désigner le vecteur  $(u, v)$  à deux dimensions.

Supposons ici que  $\Phi$  est constant, ainsi que  $\rho$ . Le carré de la vitesse  $u_h^2$  nous est donné par  $|\frac{d\Psi}{dz}|^2$ , si bien que

$$p - \rho \frac{1}{2} \left| \frac{d\Psi}{dz} \right|^2 = p_\infty - \rho \frac{U^2}{2}.$$

Il est donc tout à fait possible de calculer la force de pression résultante (par unité de hauteur du cylindre) :

$$\mathbf{F}_r = \oint p \mathbf{n} \, ds.$$

La suite du calcul est assez technique. En particulier, elle mobilise des notions d'analyse complexe qui sont vues à la fin du cours LMAT1222. Nous esquissons seulement la démonstration, avec l'objectif de nous concentrer sur le résultat principal et qui nous intéresse ici : le théorème de Kutta-Zhukovsky. La méthode consiste à exprimer la force résultante d'abord comme un vecteur  $(D, L)$ , où  $D$  représente la traînée (*drag*) et  $L$  la portance (*lift*). On calcule le nombre complexe  $D - iL$  en voyant que, lors de l'intégrale sur le contour :

$$dD = -p \, dy \quad \text{et} \quad dL = p \, dx.$$

On montre alors (référence à Kundu, p. 171) que

$$D - iL = \oint p \, dz^* = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz.$$

Cette première expression correspond au théorème de Blasius.

La dérivée  $\left( \frac{d\phi}{dz} \right)$  est connue et vaut :

$$U - \frac{R^2}{z^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi z}.$$

L'intégrale fait intervenir cette dérivée au carré et se calcule par la méthode des résidus (référence à Arfken). Après calcul, on aboutit au théorème de Kutta-Zhukovsky :

#### Key Outcome : Théorème de Kutta-Zhukovsky

Pour un écoulement incompressible, irrotationnel (fluide parfait), autour d'un obstacle, avec circulation, les valeurs de traînée et de portance sont données par :

$$D = 0, \quad L = \rho U \Gamma.$$

On en déduit deux enseignements importants :

- Dans cet écoulement parfait, il n'y a pas de traînée (pas de force horizontale). C'est le paradoxe de d'Alembert en mécanique des fluides.
- Sans circulation, il n'y a pas de portance : pas de force perpendiculaire à l'écoulement.

Ce théorème est très général et ne nécessite pas de supposer un obstacle cylindrique. Il est possible de calculer la portance pour des profils d'ailerons obtenus par une technique connue sous le nom de transformation conforme. Ici, nous avons simplement résolu numériquement l'équation de Laplace pour obtenir un profil d'aile d'avion, mais le problème reste le même : sans circulation, il n'y a pas de portance.

Il faut donc créer une circulation. C'est l'intérêt de l'aspect anguleux à l'arrière de l'aile. On crée artificiellement un point de stagnation. La seule façon de satisfaire la condition du point de stagnation est de déplacer les points de stagnation, initialement situés de part et d'autre de l'aile, en créant une circulation. C'est cette circulation qui est nécessaire à la portance.

Mais comment induire cette circulation ? Dans l'effet Magnus, c'est le ballon qui cède du moment angulaire au fluide. Mais ici, il n'y a pas de force extérieure : l'aile ne tourne pas. La circulation est donc créée à l'interface aile-fluide par des frottements, mais doit être compensée (pour conserver le moment angulaire) par un contre-vortex qui se développe à l'arrière de l'aile.

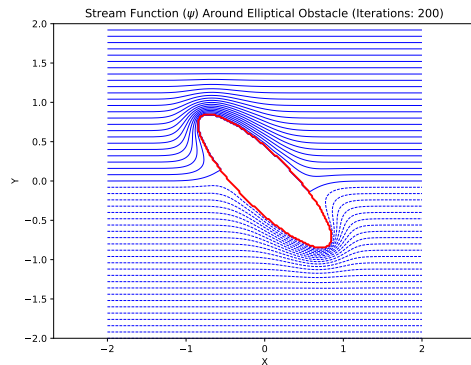


FIG. 4.6 : Résolution numérique de l'équation de Laplace autour d'un obstacle cylindrique, en supposant aucune circulation autour de l'obstacle. Observez les points de stagnation (intersection entre obstacle et obstacle) de part et d'autre de l'obstacle

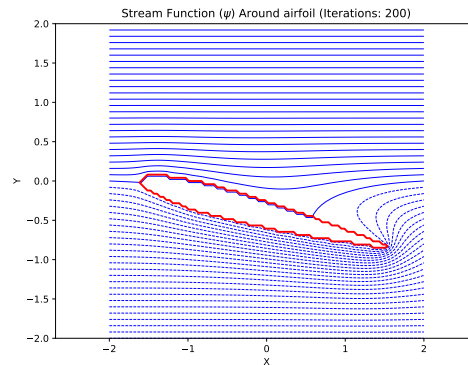


FIG. 4.7 : Même figure, mais pour un obstacle ayant la forme d'une aile d'avion. Ici encore, nous avons fait l'hypothèse de l'absence de circulation. La solution est irréaliste, car elle impose à l'écoulement de contourner la pointe de l'aile d'avion. L'hypothèse est que ce contournement sera, en pratique, rendu impossible par des effets de friction

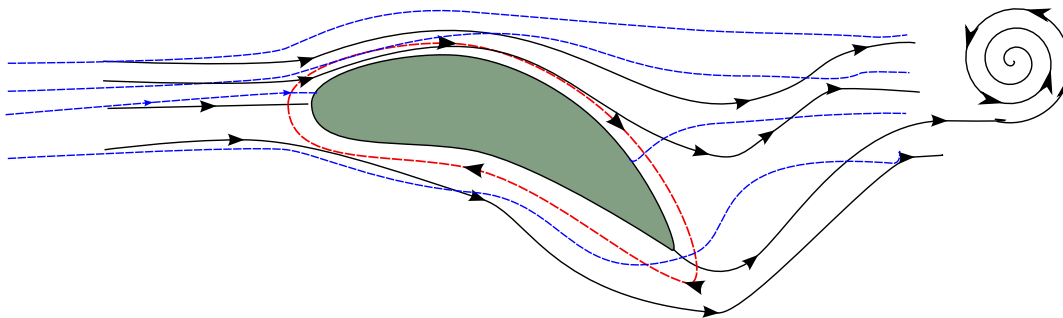


FIG. 4.8 : Schéma de l'écoulement attendu autour d'une aile d'avion. En bleu, nous avons représenté schématiquement la solution sans circulation. La circulation réelle sera plus proche de la solution noire, ou à la solution bleue s'ajoute une circulation (en rouge), telle que le point de stagnation arrière est déplacé sur la pointe de l'aile d'avion. Cette circulation nette explique la portance.



## Chapitre 5

# Écoulements visqueux

### 5.1 Équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

Dans le chapitre 2, nous avons établi l'équation d'Euler pour un fluide parfait, en négligeant les effets de la viscosité. Cependant, dans la réalité, les fluides réels (comme l'eau ou l'air) présentent une résistance interne au mouvement, due aux frottements entre couches de fluide.

On aborde la notion de viscosité dans le régime laminaire par l'expérience de l'écoulement de Couette. Soit une couche de fluide prise entre deux plaques présentant entre elles une différence de vitesse  $U$ . Si le fluide est suffisamment visqueux, la couche suffisamment fine, et la vitesse suffisamment petite (ce sont des éléments que nous allons préciser), la vitesse du fluide adopte un profil linéaire, sans glissement par rapport aux deux parois mobiles, et la force par unité d'aire ( $A$ ) à exercer sur la plaque supé-



FIG. 5.1 : Expérience idéalisée représentant la viscosité d'un fluide entre deux plaques présentant entre elles un différentiel de vitesse  $U$  sur une épaisseur  $h$ . La force par unité de surface ( $A$ ) à exercer sur la plaque supérieure en régime stationnaire est  $\frac{dF}{dA} = \mu U/h$ .

rieure pour conserver un régime stationnaire est  $\frac{dF}{dA} = \mu U/h$ , ce qui est équivalent à affirmer que la force par unité d'aire exercée par le fluide sur cette plaque est  $-\frac{dF}{dA}$ .

Cette force par unité de surface porte le nom de contrainte, et il s'agit plus particulièrement ici d'une contrainte tangentielle, notée  $\tau_{zx}$  :

$$\tau_{zx} = \mu U/h.$$

Le second indice,  $x$ , fait référence à la direction de la force (par unité de surface). Le premier indice,  $z$ , fait référence à la surface sur laquelle s'exerce la contrainte, dont la normale est dirigée dans la direction de l'axe  $e_z$ .

L'expérience est idéalisée à bien des égards, et il ne faut pas se laisser distraire par les interactions spécifiques entre le fluide et la plaque. Le point important est que le fluide présente une *résistance au cisaillement*. Nous pouvons formaliser le phénomène à l'échelle d'un élément fluide. Considérons trois éléments empilés selon l'axe  $e_z$ , caractérisés par une vitesse horizontale  $U(z)$ . À l'échelle de ce volume élémentaire, l'expression linéaire adoptée pour l'écoulement de Couette suggère que le bloc supérieur exerce une force de composante horizontale  $dF_x = -\mu \frac{dU}{dz} (z + \frac{1}{2} dz) dx dy$  sur le bloc intermédiaire, et le bloc inférieur exerce une force de composante horizontale  $dF_x = \mu \frac{dU}{dz} (z - \frac{1}{2} dz) dx dy$ .

On peut donc modéliser la somme des forces de viscosité, par unité de volume, dans cet écoulement laminaire  $U(z)$  par :

$$dF_x = \frac{d}{dz} \left( \mu \frac{dU}{dz} \right) dV = \mu \frac{d^2U}{dz^2} dV. \quad (5.1)$$

On est donc tenté de compléter le raisonnement qui a abouti à l'équation d'Euler (2.10) pour y intégrer ce phénomène de viscosité. Considérons d'abord exclusivement l'effet d'un cisaillement selon  $e_z$ , sur la composante  $e_x$  de la vitesse :

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = -\rho \nabla \Phi - \nabla p + \mu \frac{d^2u_x}{dz^2}.$$

Par symétrie, un cisaillement selon  $e_y$  aura le même effet, qui doit donc être ajouté à la même équation :

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = -\rho \nabla \Phi - \nabla p + \mu \left( \frac{d^2u_x}{dx^2} + \frac{d^2u_x}{dy^2} \right).$$

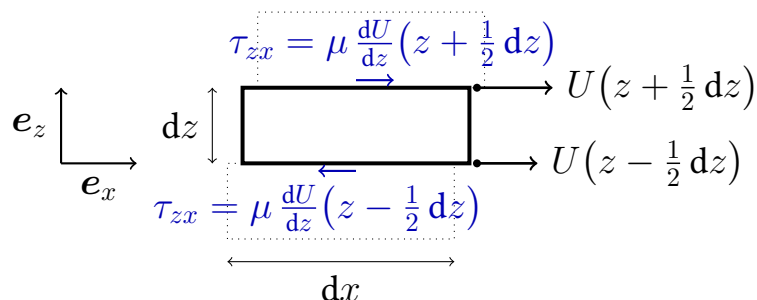


FIG. 5.2 : Bilan des forces de viscosité causées par le cisaillement sur un volume élémentaire.

Avec un peu d'audace, nous pourrions suggérer qu'un différentiel de vitesse selon l'axe  $e_x$  génère une force que l'on peut paramétrer de la même manière (résistance à l'étirement) :

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = -\rho \nabla \Phi - \nabla p + \mu \left( \frac{d^2 u_x}{dx^2} + \frac{d^2 u_x}{dy^2} + \frac{d^2 u_x}{dz^2} \right). \quad (5.2)$$

On peut justifier notre audace en reconnaissant, dans l'équation (5.2), un analogue à l'équation de la chaleur. De la même façon que l'énergie se diffuse par l'effet cumulé des chocs moléculaires, la quantité de mouvement se *diffuse*, également par échange lors des collisions. L'analogie est très imparfaite car, en réalité, les forces d'attraction jouent un rôle majeur dans le phénomène de diffusion. Nous allons donc admettre cette équation. Elle est bien correcte. C'est l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible, mais elle doit être justifiée plus soigneusement. C'est l'objet de la section 5.3.

En trois dimensions, cette équation de Navier-Stokes devient :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \mu \nabla^2 \mathbf{u},$$

où  $\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla^2 u, \nabla^2 v, \nabla^2 w)$  est le laplacien du champ de vitesse, et  $\mu$  le coefficient de viscosité.

Ainsi, on a, pour différents fluides, à 20°C, 1 atm :

Fluide	$\mu$ (Pa·s)
Air	$1.8 \times 10^{-5}$
Hexane	$0.3 \times 10^{-3}$
Eau	$10^{-3}$
Sang	$4 \text{ à } 6 \times 10^{-3}$
Huile d'olive	0.05
Miel	10

Cette équation sera suffisante pour décrire la plupart des écoulements étudiés dans ce cours, y compris l'écoulement de Poiseuille.

## 5.2 Tenseur des contraintes

Dans le chapitre 2, nous avons utilisé la pression statique pour décrire les forces normales s'exerçant sur un élément de volume de fluide. Nous avons écrit explicitement :

$$d\mathbf{f} = -p\mathbf{n} dA,$$

où  $\mathbf{n}$  est un vecteur normal à la surface témoin. Cette expression suppose que la force est purement normale à la surface, ce qui est valable pour un fluide parfait. Or, nous l'avons vu, la viscosité se manifeste par des forces *tangentes* à la surface témoin. Ces forces sont proportionnelles à la surface témoin (comme les forces de pression) mais il nous faut un formalisme mathématique qui permette d'exprimer leur caractère directionnel. C'est l'objet du tenseur des contraintes,  $\underline{\underline{T}}$ . La force associée à ce tenseur est maintenant directionnelle (contrairement à sa forme dans (2.3) et (2.5)) :

$$d\mathbf{f} = \underline{\underline{T}}\mathbf{n} dA.$$

Ce tenseur permet de prendre en compte non seulement les forces normales (pression), mais aussi les forces tangentes (cisaillement). On retrouve le fluide parfait pour  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ , que l'on peut écrire synthétiquement sous la forme  $\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{1}}$ , où  $\underline{\underline{1}}$  est la matrice unitaire.

On va donc devoir développer et justifier l'existence d'un tenseur  $\underline{\underline{\tau}}$  qui va venir compléter les effets de pression. L'enjeu est de développer une expression de  $\tau$  pour le fluide newtonien. C'est l'objet de la section suivante.

### 5.3 Dérivation formelle de l'équation de Navier-Stokes

Pour paramétrer  $\underline{\underline{\tau}}$ , nous partons du tenseur des déformations  $\underline{\underline{e}}$ , défini comme la partie symétrique du gradient de vitesse :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Ce tenseur capture les effets de compression, dilatation et cisaillement du fluide. En supposant que le fluide est newtonien (c'est-à-dire que les contraintes sont proportionnelles aux déformations) et isotrope (les propriétés sont indépendantes de la direction), on montre que le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit :

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_m e_{mm},$$

où  $\mu$  est le coefficient de viscosité dynamique et  $\lambda$  le second coefficient de viscosité. La somme  $\sum_m e_{mm}$  n'est autre que la divergence du champ de vitesse,  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ .

Le tenseur des contraintes total combine le tenseur des contraintes visqueuses avec la pression statique :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

On peut, sur cette base, définir une pression moyenne ou pression dynamique comme le tiers de la trace de  $T_{ij}$  :

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{T}}) = p + \left( \frac{2}{3}\mu + \lambda \right) \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

L'approximation de Stokes suppose que  $p = \bar{p}$ , ce qui implique  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ . Dans ce cas, le tenseur des contraintes se simplifie en :

En combinant ce résultat avec la pression statique, on obtient le tenseur des contraintes total :

$$T_{ij} = - \left( p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (5.3)$$

que l'on peut réexprimer sous la forme plus synthétique :

 **Key Outcome : Approximation de Stokes**

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{1}}p, \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\tau}} = 2\mu \left( \underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{\underline{u}} \underline{\underline{1}} \right). \quad (5.4)$$

Pour un fluide incompressible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), cette expression se réduit à :

$$\underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{1}}p + 2\mu \underline{\underline{e}}. \quad (5.5)$$

En insérant cette expression dans l'équation du mouvement, on remplace la force de pression par la divergence du tenseur des contraintes :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \Phi + \nabla \cdot \underline{\underline{T}}. \quad (5.6)$$

La divergence du tenseur  $\underline{\underline{T}}$  est définie par composante. La composante  $i$  répond à :

$$(\nabla \cdot \underline{\underline{T}})_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}.$$

En développant ce terme pour un fluide incompressible et en utilisant l'approximation de Stokes, on retrouve (après un peu de calcul) l'équation de Navier-Stokes incompressible :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (5.7)$$

Cette équation décrit la dynamique des fluides visqueux et sera la base de nos prochains développements, notamment pour l'étude des écoulements laminaires comme celui de Poiseuille.

Par ailleurs, sur base de l'identité :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u},$$

on aura, pour un écoulement incompressible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), une expression équivalente de l'équation (5.7) :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (5.8)$$

## 5.4 Écoulements de Poiseuille

Nous allons étudier différents types d'écoulements symétriques. Comme souvent en physique, l'art de résoudre ces écoulements réside dans le choix d'un bon système de coordonnées et l'application judicieuse des conditions aux limites.

### 5.4.1 Écoulement de Poiseuille plan

On considère un écoulement stationnaire, où un gradient constant de pression selon  $e_x$  contrebalance les forces de viscosité. L'écoulement s'opère entre deux plans infinis. Les plans sont selon les axes  $\{e_x, e_y\}$  et l'espace qui sépare les deux plans est selon l'axe  $e_z$ .

Par argument de symétrie, on sait que le seul gradient de pression est selon  $e_x$  :  $\frac{\partial p}{\partial x} = C$ . Par ailleurs, on admet que si les deux plaques qui bordent le flux sont fixes,  $u(z = 0) = u(z = h) = 0$  (on parle en anglais de *non-slip boundary conditions*). On néglige les effets de gravitation. La notation est  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ .

S'il n'y a pas de rupture de symétrie (ce qui est à prouver, nous y reviendrons), la symétrie des conditions aux limites impose  $v = w = 0$ .

L'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible (5.7) devient, selon l'axe  $e_x$  :

$$\rho u \frac{du}{dx} = - \underbrace{C}_{\frac{dp}{dx}} - \mu \frac{d^2 u}{dz^2}. \quad (5.9)$$

Les dérivées ordinaires remplacent les dérivées partielles car  $u$  n'est désormais fonction que d'une seule variable. Nous voyons que le gradient de pression (constant,  $C$ ) est potentiellement équilibré par deux termes : le transport de quantité de mouvement, dont nous avons vu qu'il agit comme une espèce de force dynamique, et les forces de viscosité. Puisqu'ici nous admettons une symétrie de translation pour la vitesse (la vitesse est constante selon  $e_x$ ), le membre de gauche s'annule et l'équation se réduit à :

$$C = \mu \frac{d^2 u}{dz^2},$$

dont la solution générale est  $u = A + Bz + \frac{C}{2\mu}z^2$ . Les conditions aux limites que nous avons choisies imposent la solution :

$$u(z) = \frac{C}{2\mu}(z^2 - hz).$$

Le débit volumique, par unité de profondeur (le long de l'axe  $e_y$ ), s'obtient en intégrant la vitesse selon la hauteur  $z$  :

$$Q = \int_0^h u(z) \, dz = -\frac{Ch^3}{12\mu}.$$

#### 5.4.2 Écoulement de Poiseuille dans un cylindre

Nous considérons un problème analogue, mais cette fois en adoptant une conduite cylindrique. Nous admettons toujours un gradient de pression le long de l'horizontale  $p = p(x)$ , et une vitesse axisymétrique ( $u = u(r)$ ). Cette fois, notre équation devient :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_x}{dr} \right).$$

On peut retrouver cette équation en exprimant les opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques, mais nous pouvons également la retrouver en raisonnant sur un bilan de forces.

Considérons, le long de l'écoulement, un anneau de fluide de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  (figure 5.3).

Les forces agissant sur cet anneau sont, d'une part, la force de pression  $-2\pi r \frac{dp}{dx} dr$ , et d'autre part, la force visqueuse issue de la contrainte de cisaillement :  $\tau_{rx} = \mu \frac{du_x}{dr}$ . La force nette sur l'anneau est :

$$2\pi \, dx \left( \tau_{rx}|_{r+dr} (r + dr) - \tau_{rx}|_r r \right) = 2\pi \, dx \frac{d}{dr} \left( r\mu \frac{du}{dr} \right) dr.$$

L'équilibre des forces donne :

$$0 = -2\pi r \frac{dp}{dx} + 2\pi\mu \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right),$$

ce qui est bien notre équation. Nous pouvons maintenant la résoudre, en tenant compte de la condition aux limites  $u(a) = 0$ , pour un cylindre de

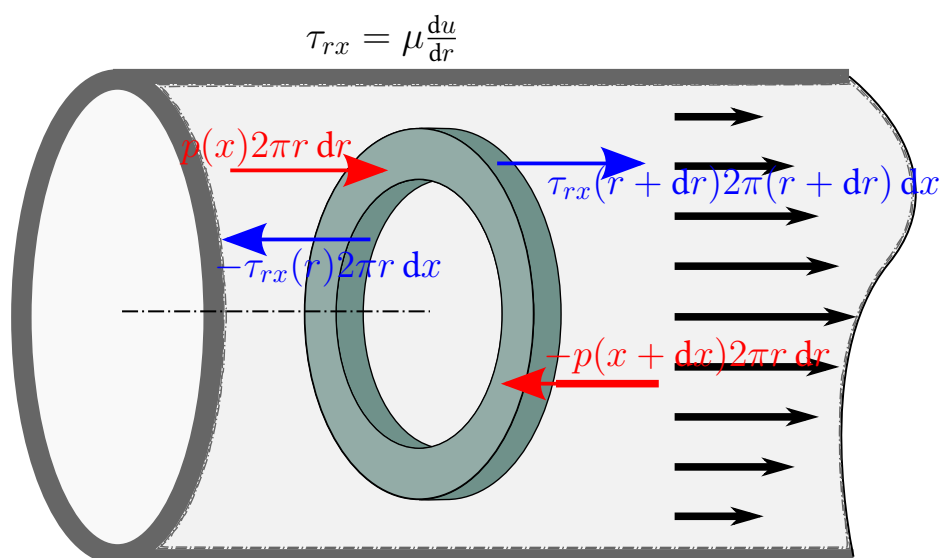


FIG. 5.3 : Écoulement de Poiseuille dans un cylindre. On montre les forces exercées sur un anneau de fluide dans un cylindre. Les forces de pression et de cisaillement sont indiquées.

rayon  $a$  :

$$u(r) = \frac{a^2 - r^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Le débit volumique  $Q$  est obtenu en intégrant sur la section du cylindre :

$$Q = \int_0^a u_x(r) 2\pi r \, dr = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}.$$

### 5.4.3 Conditions laminaires et écoulement développé

Nous avons donc considéré que la symétrie du problème se reflète dans la symétrie des lignes de courant, ce qui génère  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ , et donc annihile tous les termes d'advection. L'écoulement est donc supposé laminaire. De plus, un écoulement réel ne peut pas être infini selon l'axe  $e_x$ . Il doit bien y avoir un point d'entrée et un point de sortie, auxquels s'appliquent une différence de pression, et auxquels la symétrie selon  $e_x$  est, par définition, rompue. Nous avons fait l'hypothèse que nous sommes suffisamment loin de ces points d'entrée et de sortie, et cette seconde hypothèse porte le nom d'hypothèse d'un *écoulement développé*.

Il nous faudra bien examiner ces hypothèses et ce sera l'objet du chapitre 6, qui nous introduira à l'analyse dimensionnelle. La transition vers le régime turbulent sera analysée à la section 6.2.1.

### 5.5 Écoulement très visqueux autour d'une sphère (écoulement de Stokes)

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de calculer, analytiquement, la traînée causée par le mouvement d'une sphère dans un fluide. Par action-réaction, cette traînée correspond à la force que le fluide exerce sur la sphère et qui s'oppose à son mouvement.

La théorie est due à Stokes et n'est valable que si les termes d'advection sont négligés par rapport aux termes de friction. Nous verrons dans la section 6.2.1 qu'il faut que le nombre de Reynolds soit petit. Nous y reviendrons.

Les mathématiques nécessaires à la résolution de l'écoulement ne présentent pas de difficulté conceptuelle, mais cette résolution n'en est pas moins assez technique. Nous la donnons pour référence.

On se base sur la forme (5.8) de l'équation de Navier-Stokes, en négligeant le membre de gauche (stationnaire et pas d'advection) et le terme de géopotentiel :

$$\nabla p = -\mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (5.10)$$

et on adopte des coordonnées sphériques  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$  avec l'hypothèse que le flux est axisymétrique :  $u_\varphi = 0$ .

Dans ces conditions, on peut construire une fonction de courant  $\psi_\varphi$  qui est un scalaire invariant selon  $\varphi$ , telle que :

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ce choix garantit  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Avec un peu de calcul, on montre que :

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{r \sin \theta} E^2 \psi_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

où  $E^2$  est l'opérateur différentiel défini comme suit :

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

En coordonnées sphériques, l'équation (5.10) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} E^2 \psi_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= -\frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} E^2 \psi_\varphi. \end{aligned}$$

On élimine la pression par des dérivées croisées pour trouver l'équation à résoudre pour  $\psi_\varphi$  :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right)^2 \psi_\varphi = 0. \quad (5.12)$$

La résolution en est un peu technique et sort du cadre de ce cours (cf. ACHESON 2001, p. 225). Pour une condition  $u_x \rightarrow U$  à grande distance, et  $u_r = u_\theta = 0$  en  $r = a$  (vitesse nulle sur la sphère), on montre que :

$$\psi_\varphi = \frac{1}{4} U \left( 2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar \right) \sin^2 \theta, \quad (5.13)$$

$$p = p_\infty - \frac{3\mu U a}{2} \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (5.14)$$

Les contraintes exercées sur la sphère valent :

$$\begin{aligned} t_r = T_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ t_\theta = T_{r\theta} &= \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ t_\phi = T_{r\phi} &= 0. \end{aligned}$$

Après calcul, cela donne :

$$\begin{aligned} t_r &= -p_\infty + \frac{3\mu U}{2} \frac{\cos \theta}{a}, \\ t_\theta &= -\frac{3\mu U}{2} \frac{\sin \theta}{a}. \end{aligned}$$

On peut alors recalculer la composante horizontale, le long de  $e_x$ , du tenseur des contraintes :

$$t_x = t_r \cos \theta - t_\theta \sin \theta = -p_\infty \cos \theta + \frac{3\mu U}{2a}.$$

On en déduit la traînée de la sphère, c'est-à-dire la force exercée sur la sphère dans la direction du flux :

$$D = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t_x a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 6\pi\mu U a. \quad (5.15)$$

C'est la formule de Stokes pour une sphère. Rappelons qu'elle s'applique à un écoulement très visqueux, comme par exemple une bille dans la glycérine.

#### Problème de la sédimentation

La viscosité dynamique ( $\mu$ ) de l'eau est de l'ordre de  $1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ . Cherchez sur Internet ou ailleurs le diamètre et la densité d'un grain de sable, et d'un grain d'argile. Quelles sont les vitesses verticales de ces deux objets telles que leur poids soit équilibré par les forces de frottement ? Combien de temps mettront-ils pour atteindre le fond d'un lac de  $10 \text{ m}$  de profondeur ?

## Chapitre 6

# Modèles d'écoulements et similarité dynamique

### 6.1 Analyse dimensionnelle

#### 6.1.1 Exemple du pendule simple

Écartons-nous un instant de la physique des fluides pour nous concentrer sur un exemple simple : un pendule de masse  $m$ , de longueur  $l$ , et lâché avec un angle  $\alpha$ . Les frottements sont négligeables, et le pendule est soumis à la force de gravité. On cherche à déterminer la période  $p$  de ses oscillations.

L'un des principes fondamentaux de la physique est que le comportement d'un système ne doit pas dépendre du système d'unités utilisé pour le décrire, car celui-ci est conventionnel. Ainsi, que l'on utilise des grammes, des kilogrammes ou des onces pour mesurer la masse, la période  $p$  doit être indépendante de ces choix.

On vérifie cette contrainte en s'assurant de la cohérence dimensionnelle dans la construction des grandeurs physiques. Dans ce problème, nous avons trois unités indépendantes :

- une longueur  $[l] = L$ ,
- une masse  $[m] = M$ ,
- une accélération de gravité  $[g] = L/T^2$ .

On cherche à exprimer un temps  $[p] = T$ .

La seule combinaison possible pour créer un temps  $T$  à partir des unités apparaissant dans  $[l]$ ,  $[m]$  et  $[g]$  est

$$T = \sqrt{\frac{L}{L/T^2}} = \sqrt{\frac{[l]}{[g]}}$$

On en déduit que la période  $p$  doit être proportionnelle à  $\sqrt{l/g}$  :

$$p = \sqrt{\frac{l}{g}} f(\alpha). \quad (6.1)$$

Comme la masse  $m$  n'intervient pas dans la combinaison dimensionnelle pour  $T$ , la période ne dépend pas de  $m$ . Nous avons obtenu ce résultat sans résoudre l'équation de Newton, simplement en imposant la cohérence dimensionnelle. Bien que la fonction  $f$  ne soit pas connue, nous pouvons déjà prévoir que pour construire, sur la Lune ( $g_l = g/6$ ), un pendule de même période qu'un pendule de longueur  $l$  sur Terre, il faut réduire sa longueur d'un facteur 6. Nous avons aussi prédit que la période d'oscillation du pendule ne dépend pas de sa masse.

### 6.1.2 Théorème de Buckingham et nombres adimensionnels

Une approche équivalente mais plus formelle consiste à dire que le comportement physique ne peut dépendre que de combinaisons adimensionnelles. Construisons ces nombres pour le pendule. Nous avons cinq grandeurs physiques :

- une masse (unité  $M$ ),
- une longueur (unité  $L$ ),
- une accélération de gravité (unité  $L/T^2$ ),
- une période (unité  $T$ ),
- un angle  $\alpha$  (sans dimension).

Nous cherchons à construire une variable adimensionnelle  $\Pi$  de la forme :

$$\Pi = m^a l^b g^c p^d \alpha^e.$$

Pour que  $\Pi$  soit adimensionnel, ses exposants doivent annuler les dimensions de  $M$ ,  $L$  et  $T$ . On exprime cette contrainte par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= a \quad (\text{pour } M), \\ 0 &= b + c \quad (\text{pour } L), \\ 0 &= -2c + d \quad (\text{pour } T). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Le système admet pour solutions  $a = 0$ ,  $b = -c$ , et  $d = 2c$ . L'exposant  $e$  reste indéterminé, car  $\alpha$  est déjà adimensionnel. Ce problème est donc décrit par deux nombres adimensionnels indépendants :

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} &= l^{-1/2} g^{1/2} p, \\ \Pi^{(2)} &= \alpha. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Le nombre de nombres adimensionnels est donné par le théorème de Buckingham : avec 5 quantités physiques ( $m$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $p$ ,  $\alpha$ ) et 3 unités indépendantes ( $M$ ,  $L$ ,  $T$ ), on forme  $5 - 3 = 2$  nombres adimensionnels. On peut donc s'attendre à une relation de la forme  $F(\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}) = 0$ , ou de façon équivalente  $\Pi^{(1)} = f(\Pi^{(2)})$ . En remplaçant  $\Pi^{(1)}$  et  $\Pi^{(2)}$  par leurs expressions, on retrouve la relation (6.1).

### 6.1.3 Similarité dynamique et applications

Voici comment utiliser ce raisonnement en pratique. Supposons que les équations du pendule soient complexes et non résolubles analytiquement, mais que nous souhaitons prédire son comportement. Nous savons que le système est caractérisé par deux nombres adimensionnels. Nous pouvons les interpréter physiquement :

- $\Pi^{(1)}$  est lié à la structure du système (longueur, gravité, période).
- $\Pi^{(2)}$  dépend de l'angle initial  $\alpha$ .

Si nous voulons prédire la période d'un grand pendule, nous pouvons construire un modèle réduit de même forme, calibrer la fonction  $f$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ , puis appliquer la relation (6.1) au grand pendule. On peut par exemple s'attendre à ce que  $\Pi^{(1)}$  dépende de la façon dont la masse est répartie le long de l'axe du pendule, dont nous n'avons toujours rien dit.

On dit que deux systèmes ayant les mêmes nombres adimensionnels sont dans une relation de similarité dynamique. Cette notion est fondamentale pour prédire le comportement de systèmes physiques complexes (comme un avion) à partir de tests en soufflerie avec des modèles réduits.

Notons enfin qu'il est souvent plus pertinent d'utiliser des vitesses angulaires que des périodes ou des fréquences. Par exemple, pour un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega$ , l'équation du mouvement s'écrit  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ . La dérivée temporelle fait apparaître  $\omega$  naturellement, ce qui rend son utilisation plus directe que celle de la période  $T = 2\pi/\omega$ .

D'ailleurs, pour un pendule de masse ponctuelle, et en utilisant la formule (6.3), la théorie Newtonienne pour des angles  $\alpha$  petits prédit  $\Pi^{(1)} = 2\pi$ , alors qu'on définissant, de façon plus astucieuse,  $\Pi^{(1)} = l^{-1/2}g^{1/2}\omega^{-1}$ , on a  $\Pi^{(1)} = 1$ .

## 6.2 Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

### 6.2.1 Transition vers le régime turbulent

Reprenons l'équation décrivant l'écoulement dans le plan de Couette (5.9). Nous avons expliqué que le terme de transport de quantité de mouvement s'annule *si la symétrie des conditions aux limites se reflète dans le champ de vitesse*. Rien ne le garantit *a priori*, cependant. Il est possible en principe que l'écoulement que nous avons déterminé se révèle instable. Les conditions de stabilité sont cependant très difficiles à établir analytiquement. C'est un problème de stabilité hydrodynamique qui peut, en principe, se réduire à sa dimension mathématique : quelles sont les conditions d'instabilité ? Ces conditions ne peuvent pas dépendre du système d'unités utilisé pour décrire l'écoulement.

Reprenons donc l'équation (5.9), mais en utilisant la viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$ , qui a pour avantage de s'exprimer en  $\text{m}^2/\text{s}$  et nous débarrasser des kilogrammes :

$$u \frac{du}{dx} = -C + \nu \frac{d^2u}{dx^2}. \quad (6.4)$$

Le problème, avec ses conditions aux limites, met en scène trois grandeurs :  $u$ ,  $h$  (la distance entre les deux plaques), et  $\nu$ , ainsi que deux unités in-

## 6.2. ANALYSE DIMENSIONNELLE DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES 77

dépendantes : l'unité de longueur (exprimée en m) et de temps (en s). La structure de la solution va donc être décrite par *un* nombre adimensionnel. Il y a *a priori* différentes façons de le construire, mais nous pouvons en chercher une qui a un sens physique bien défini. Reprenons l'équation (6.4). Le membre de gauche (l'advection) a les unités  $U \cdot U/L$ , où  $U$  symbolise une échelle de vitesse et  $L$  une échelle de longueur. Cela signifie que si l'on change les dimensions du système, ce terme restera proportionnel à  $u^2/h$ . Le membre de droite, qui exprime les forces de viscosité, est proportionnel à  $\nu u/h^2$ . Nous pouvons former un nombre adimensionnel en mettant en rapport le terme d'advection avec celui faisant intervenir la viscosité. Appelons-le le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{uh}{\nu}. \quad (6.5)$$

Les principes de l'analyse dimensionnelle nous garantissent que la condition de stabilité de l'écoulement ne dépend *que* de ce nombre, pour autant que nous ayons correctement identifié toutes les contraintes physiques du problème. Par ailleurs, notre intuition physique nous permet de prédire que l'écoulement laminaire perdra sa stabilité lorsque les termes d'advection deviennent potentiellement plus importants, suggérant une transition vers un écoulement turbulent *au-delà* d'un nombre de Reynolds critique. Ce nombre de Reynolds peut être déterminé par une expérience réalisée par Osborne Reynolds, illustrée p. 71 (Fig. 15) du Vol. II des "Papers on mechanical and physical subjects" REYNOLDS, BRIGHTMORE et MOORBY 1901. Dans une conduite cylindrique, la transition s'opère pour des nombres de Reynolds entre 2000 et 3000. Cette mesure donne lieu à une classification des écoulements qui s'étend bien au-delà des conditions particulières de l'écoulement de Poiseuille.

Ainsi, pour un écoulement caractérisé par une vitesse typique  $U$ , une dimension typique  $L$  et une viscosité cinématique  $\nu$ , on définit  $\text{Re} = UL/\nu$  et on considère :

- $\text{Re} \lesssim 1$  : les termes d'advection sont dominés par les termes de viscosité. Ce sont les conditions de l'écoulement de Stokes tel que nous l'avons dérivé en section 5.5 et dont nous avons fait l'hypothèse pour le problème de sédimentation.

- $5 \lesssim \text{Re} \lesssim 1000$  : l'écoulement est principalement laminaire, mais les forces et dissipations mesurées commencent à s'écarter des conditions de l'écoulement de Stokes. Des tourbillons apparaissent aux points d'asymétrie imposés par l'expérience, par exemple à l'embouchure du tube, ou, si l'on considère l'écoulement autour d'un obstacle, à l'arrière de l'obstacle.
- $2000 \lesssim \text{Re} \lesssim 3000$  : régime intermittent où des phases turbulentes succèdent à des phases laminares.
- $3000 \lesssim \text{Re}$  : régime turbulent, dont la nature et la complexité peuvent évoluer en fonction de  $\text{Re}$ .

Rappelons que le seuil critique  $\text{Re} \sim 3000$  s'applique à une expérience bien précise. Le problème d'ingénierie posé aux concepteurs d'engins aérodynamiques est précisément de concevoir des profils et des matériaux qui font reculer la transition vers la turbulence vers des nombres de Reynolds plus élevés.

### 6.2.2 Prédiction de l'épaisseur de la couche limite

Considérons un écoulement autour d'un obstacle de longueur caractéristique  $L$ . Près de la paroi, la vitesse du fluide doit s'annuler (condition de non-glissement). La viscosité  $\nu$  joue donc un rôle dominant, même si  $\text{Re} \gg 1$  globalement.

Nous cherchons l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite, où les effets visqueux sont significatifs. Dans cette région, les termes inertiels et visqueux dans l'équation de Navier-Stokes doivent être du même ordre de grandeur. Ainsi, par rapport au cadre posé dans la section 6.2.1, où nous cherchions un nombre de Reynolds critique pour la transition vers un régime turbulent, ici nous cherchons la dimension typique pour laquelle les termes inertiels et visqueux peuvent s'équilibrer, étant donné un nombre de Reynolds imposé par l'expérience.

Analysons les ordres de grandeur présents dans l'équation de Navier-Stokes. Si  $U$  est une vitesse typique et  $L$  une distance caractéristique de l'objet aérodynamique étudié, le terme d'advection sera de l'ordre de  $U^2/L$ . Dans la couche limite, le terme de viscosité met en scène une dissipation visqueuse sur la distance typique de la couche limite, donc un terme de l'ordre de  $\nu U/\delta^2$ . La condition est donc :

## 6.2. ANALYSE DIMENSIONNELLE DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES 79

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2}, \quad \text{soit} \quad \delta^2 \sim \frac{\nu L}{U} = \frac{L^2}{\text{Re}}.$$

Ainsi, l'analyse dimensionnelle prédit que, pour  $L$  donné (par la dimension de l'obstacle), l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  décroît comme  $1/\sqrt{\text{Re}}$ . Cette prédiction explique pourquoi, à haut nombre de Reynolds, la viscosité ne joue un rôle significatif que dans une fine couche près des parois, tandis que l'écoulement est essentiellement non visqueux ailleurs.

Nous avons pris un risque. Nous avons dérivé le terme visqueux en supposant qu'il a la forme donnée dans l'équation (5.7) et en estimant que le Laplacien aura bien un ordre de grandeur proportionnel à  $\delta^{-2}$ . À vrai dire, nous n'en savons rien, car l'écoulement peut prendre une forme complexe et multidimensionnelle.

La seule chose que nous pouvons dire est ceci. Notre écoulement est maintenant caractérisé par 4 grandeurs imposées par l'expérience :  $U$ ,  $L$ ,  $\delta$  et  $\nu$ , et deux dimensions. Il y a donc deux nombres adimensionnels, que l'on peut construire comme  $\text{Re}$  et  $\delta/L$ . La physique impose une relation de type  $F(\delta/L, \text{Re}) = 0$ , dont la résolution peut prendre la forme  $\delta/L = f(\text{Re})$ , soit  $\delta = Lf(\text{Re})$ .

Nous ne connaissons pas *a priori* la relation  $f(\text{Re})$ , mais nous estimons qu'à la limite d'un régime laminaire, elle doit prendre la forme  $f(\text{Re}) \propto \text{Re}^{-0.5}$ . Dans un régime plus complexe, on attendra plus généralement  $f(\text{Re}) \propto \text{Re}^{-\alpha}$  et, généralement,  $\alpha < 0.5$ , avec une valeur typique de l'ordre de 0.2.

### 6.2.3 Discussion

#### **Simulateur de vol**

Soit un avion de 100 m de longueur, une vitesse de 300 m/s, une viscosité cinématique de l'air de  $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Quelle est la valeur de  $\text{Re}$ ? Quel est l'ordre de grandeur de  $\delta$  dans l'hypothèse laminaire?

Sur cette base, supposons que l'on désire calculer l'écoulement avec un superordinateur avec la résolution nécessaire pour capturer la couche limite. De combien de mailles tri-dimensionnelles avons-nous besoin?

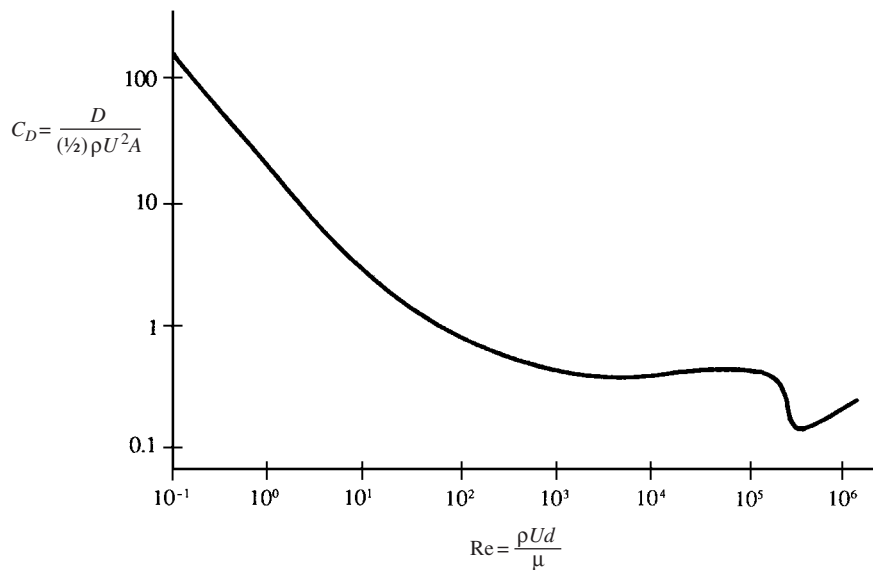


FIG. 6.1 : Coefficient de "drag" pour la sphère. La section efficace vaut  $\pi r^2$ . La transition du régime laminaire à turbulent s'observe à  $Re_{sim} \approx 5 \cdot 10^5$  et est caractérisée par une chute du drag. Figure issue du P. K. KUNDU et COHEN 2004, Fig. 8.2, p. 271.

Si nous tenons compte du critère dit CFL (qui sera vu au cours LPHYS1303), nous pouvons aussi calculer la résolution temporelle à laquelle l'ordinateur doit calculer. On trouvera ... 20 micro-secondes ! On s'apercevra très vite que résoudre les équations de Navier-Stokes autour d'un avion est impossible. Il faudrait de l'ordre de  $10^{16}$  opérations pour simuler une seconde de vol. Le même constat s'applique aux calculs de flux atmosphériques et océaniques. Les équations de Navier-Stokes doivent donc être adaptées (modifiées ou tronquées) pour éviter de résoudre dans le détail les écoulements aux échelles les plus petites, et qui, pourtant, interviennent dans les bilans d'énergie et de quantité de mouvement. Cela reste l'un des grands enjeux de la mécanique des fluides contemporaine.

## 6.2. ANALYSE DIMENSIONNELLE DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES 81

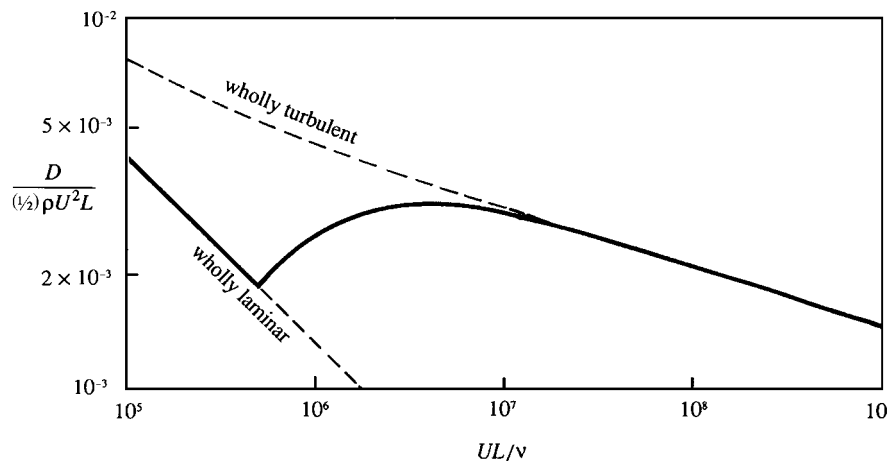


FIG. 6.2 : Coefficient de "drag" pour un plan. La transition du régime laminaire au turbulent implique un changement dans les lois de puissance, passant de  $D \sim Re^{-0.5}$  à  $D \sim Re^{-0.5}$  pour un écoulement parfaitement turbulent. Observez l'augmentation du drag dans le régime intermédiaire. Figure de P. K. KUNDU et COHEN 2004, Fig. 10.12, p. 339.

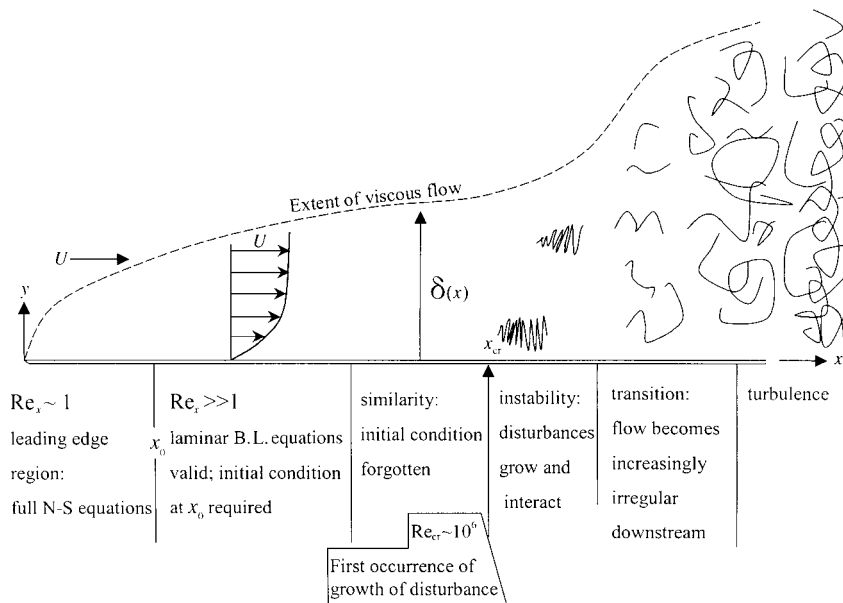


FIG. 6.3 : Représentation schématique de la couche limite visqueuse dans un écoulement en fonction du nombre de Reynolds. Figure de P. K. KUNDU et COHEN 2004, Fig. 10.11, p. 338.



# Chapitre 7

## Tension de surface

### 7.1 Origine de la tension de surface

#### 7.1.1 Point de vue macroscopique

À l'intérieur d'un fluide, comme nous l'avons vu, les interactions entre les atomes ou les molécules se manifestent, à l'échelle macroscopique, par de la *viscosité*. Dans les fluides courants tels que l'air, l'eau ou l'huile, on peut admettre que la viscosité est isotrope et linéaire : c'est l'hypothèse newtonienne. À l'échelle microscopique, les interactions résultent de la combinaison de forces répulsives, à courte distance et associées à l'interpénétration des couches électroniques, et de forces attractives telles que les forces de Van der Waals et les ponts hydrogène, qui agissent à plus grande distance.

De façon un peu schématique, nous pouvons considérer que les forces attractives se manifestent la plupart du temps, alors que les forces répulsives se manifestent lorsque les molécules s'entrechoquent. On pourrait comparer ces dernières aux rebonds élastiques entre des billes qui se percutent. Adoptons maintenant un point de vue plus macroscopique. Nous savons que si nous plaçons une surface témoin à l'intérieur du fluide, cette dernière va subir une force proportionnelle à la surface exposée. En grande partie, cette force exprime l'échange de quantité de mouvement causé par les chocs des molécules. Il s'agit de la pression cinétique, notée  $p_k$ , que l'on peut estimer en physique statistique par  $p_k = \rho k_B T$  (où  $k_B$  est la constante de Boltzmann).

Dans les liquides, cette pression est modifiée par les interactions intermoléculaires dominées par des phénomènes d'attraction. On peut donc écrire

BERRY 1971 :

$$p = p_k + p_f, \quad (7.1)$$

où  $p_f$  est la pression dite "statique", associée aux interactions intermoléculaires d'attraction.

Considérons une surface témoin : la pression "statique" résulte de la force exercée par les molécules d'un côté de la surface (par exemple, à gauche) sur les molécules de l'autre côté. Cette pression statique est généralement négative (car les forces sont attractives). Ce n'est qu'en cas de pressions extrêmes, où la distance intermoléculaire est fortement réduite, que la pression statique peut devenir positive.

À l'intérieur du fluide, loin de la surface ou de l'interface avec d'autres matériaux, nous pouvons faire l'hypothèse que le milieu est isotrope. C'est d'ailleurs pour cette raison que les forces exercées contre une surface témoin sont indépendantes de l'orientation de cette surface. Près de la surface, l'isotropie est rompue. Il faut donc définir une pression "normale"  $p_n$ , qui s'exerce sur une surface témoin perpendiculaire à l'interface, et la distinguer d'une pression "tangentielle"  $p_t$ .

### 7.1.2 Pression statique et dynamique

Le point de vue macroscopique nous amène à réfléchir à la distribution de la pression. L'hypothèse centrale est que la pression cinétique  $p_k$  dépend de la densité du fluide. Or, cette densité diminue près de la surface, en raison de l'équilibre dynamique entre les phases liquide et vapeur. Nous supposons également que  $p_k$ , qui résulte des chocs moléculaires, reste isotrope.

Nous avons déduit que  $p_k$  diminue près de la surface. Par ailleurs, le fluide étant au repos, il n'y a pas d'accélération verticale macroscopique. Par conséquent, la dérivée partielle de la pression normale par rapport à  $z$  est nulle :  $\partial p_n / \partial z = 0$ . Comme  $p_k$  diminue près de la surface,  $p_{f,n}$ , la composante normale de la pression statique, doit être moins négative, donc diminuer en valeur absolue.

Cela est cohérent avec la figure 7 de MARCHAND et al. 2011 : si on considère une surface témoin horizontale, les attractions étant à longue portée, il y a moins de molécules à "tirer" au fur et à mesure qu'on se rapproche de la surface. Autrement dit, si l'on s'intéresse à la force exercée sur la surface supérieure, il y a moins de molécules qui tirent vers le haut.

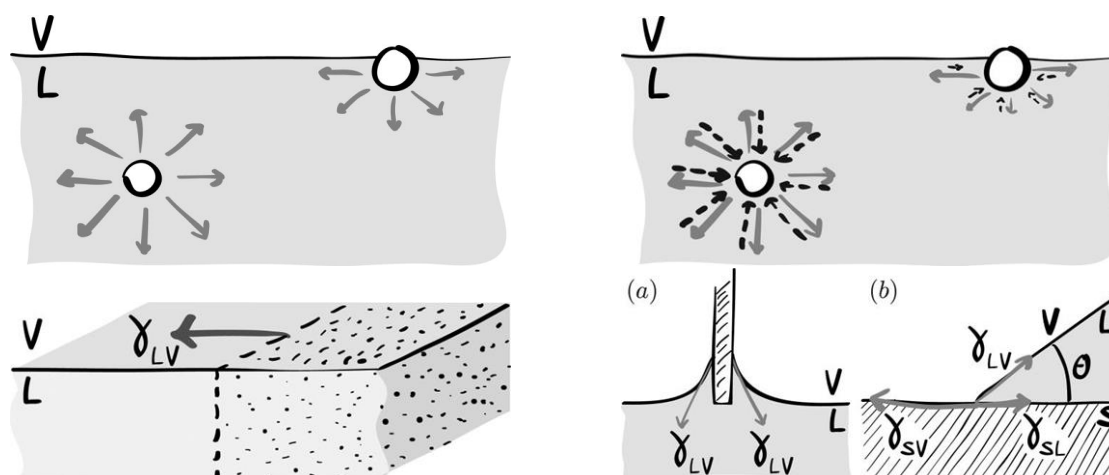


FIG. 7.1 : Quatre figures de MARCHAND et al. 2011. (Haut à gauche) : Représentation qualitative des interactions d'une molécule. À la surface, l'absence de voisins supérieurs brise la symétrie des interactions. (Haut à droite) : Quantification des forces attractives (noir, tireté) et répulsives (gris) sur une parcelle de fluide lagrangienne. À l'équilibre, leur somme est nulle. Près de la surface, la raréfaction des molécules diminue la pression cinétique (répulsive). Pour maintenir l'équilibre vertical, la composante verticale de la pression statique s'ajuste (ajustement de la distribution des molécules selon la verticale), mais sa composante horizontale ne suit pas la même loi de variation, créant une anisotropie du tenseur des pressions au sein de la couche interfaciale. Ce déséquilibre est l'origine de la tension de surface. (Bas à gauche) : La force nette exercée par le volume gris sur le volume en pointillé est donc purement horizontale et proportionnelle à la longueur de l'interface, avec  $\gamma_{lv}$  comme coefficient de proportionnalité. (Bas à droite) : À une ligne de contact triple, l'angle  $\theta$  résulte de l'équilibre statique entre les tensions de surface, toutes tangentes aux interfaces respectives.

En revanche, la symétrie des forces d'attraction est préservée dans la direction tangentielle :  $p_{f,t}$  n'a aucune raison de varier quand on s'approche de la surface. Donc,  $p_k$  diminue (les forces "répulsives"), mais  $p_{f,t}$  reste constant : cela revient à dire qu'il y a une force tangentielle nette qui s'exerce sur un élément de volume en surface, dans toutes les directions.

### 🔑 Key Outcome : Force de tension de surface

Considérons un élément de surface  $dS$  à l'interface entre un liquide et un gaz (par exemple, l'air). La tension de surface  $\gamma$  agit tangentiellement à cette interface, et la force résultante par unité de longueur est  $\gamma$ . Pour un contour fermé de longueur  $L$  délimitant une surface, la force totale due à la tension de surface est donc :

$$\mathbf{F} = \gamma L \mathbf{t} \quad (7.2)$$

où  $\mathbf{t}$  est un vecteur unitaire tangent à la surface, perpendiculaire au contour  $L$  et dirigé vers l'extérieur.

#### 7.1.3 Point de vue microscopique : accélération verticale des molécules

Du point de vue microscopique, une molécule en surface est attirée par les molécules situées en dessous d'elle, mais elle n'a pas de voisine au-dessus pour la retenir. On en déduit qu'elle subit, en moyenne, une accélération dirigée vers le bas. Cependant, les chocs répulsifs avec les molécules voisines (analogues à des collisions élastiques) compensent cette attraction, de sorte que sa position moyenne reste stationnaire.

#### 7.1.4 Point de vue thermodynamique : tension de surface

Une molécule dans la masse du fluide (le *bulk*) est liée à ses voisines par un potentiel de Lennard-Jones, négatif. Une molécule en surface du fluide est liée à moins de molécules voisines. On en conclut donc que son potentiel de liaison est moins négatif qu'une molécule éloignée de la surface. Ainsi, pour une même masse de fluide, agrandir l'interface requiert de rompre des liaisons, ou encore d'augmenter l'énergie libre de la masse de fluide. On note  $\gamma$  le coefficient de tension de surface, défini comme le rapport entre la variation d'énergie libre  $dH$  et la variation d'aire  $dA$  de l'interface

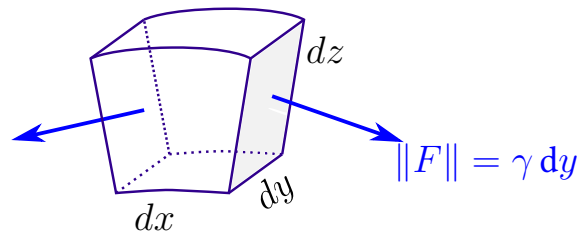


FIG. 7.2 : Bilan des forces exercées sur une parcelle de fluide en surface (générant une force nette à l'intérieur de la courbure).

avec le vide :

$$\gamma = \frac{dH}{dA}$$

Le travail nécessaire pour agrandir la surface est égal à la variation d'énergie libre  $H$ .

Pour une double interface vide – liquide – vide présentant un côté  $L$ , on a :

$$dH = 2\gamma L dx = F dx \implies F = 2\gamma L.$$

## 7.2 Tension d'une surface courbe

Pour une interface courbe décrite par  $\eta(x)$ , la différence de pression  $\Delta p$  entre les deux côtés de l'interface est donnée par la loi de Young-Laplace. En une dimension, cette relation s'écrit :

$$\Delta p = -\gamma \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2}$$

Cette équation montre que  $\Delta p$  est proportionnelle à la courbure locale de l'interface (deuxième dérivée de  $\eta$  par rapport à  $x$ ) et à la tension de surface  $\gamma$ . Le signe  $-$  permet de tenir compte que, pour une concavité vers le bas ( $\frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} < 0$ ), la tension de surface génère un excès de pression juste sous la surface, par rapport à la pression à l'extérieur de la surface.

Si on considère une surface en trois dimensions, c'est-à-dire le cas où  $\eta$  devient une fonction  $\eta(x, y)$ , les tensions causées par la courbure selon les deux axes principaux s'additionnent. On montre alors que, si on définit

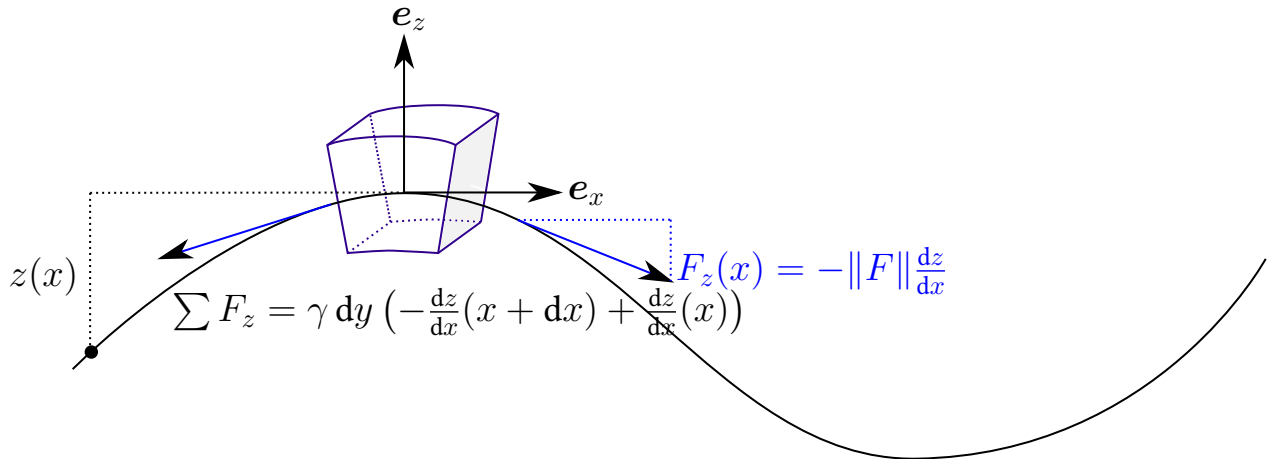


FIG. 7.3 : Illustration d'une interface liquide-gaz courbée : la différence de pression  $\Delta p$  à travers une interface courbe est proportionnelle à la courbure locale et à la tension de surface  $\gamma$ .

l'axe  $z$  comme étant perpendiculaire à l'interface, et les axes  $x, y$  selon les directions principales de la courbure,

$$\Delta p = -\gamma \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right)$$

C'est la loi de Young-Laplace.

Elle est souvent présentée un peu autrement :

#### Calcul du rayon de courbure

Soit la courbe, dans le plan  $x, z$ , paramétrée de façon suivante :  $x^2 + (z - R)^2 = R^2$ . C'est un cercle de rayon  $R$ , centré en  $(x, z) = (0, R)$ . Ce cercle est tangent à la droite horizontale  $z = 0$ , au point  $(0, 0)$ . Vérifiez que la partie inférieure du cercle répond à l'équation  $z(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ . Ensuite, calculez  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  au point de contact. Vous obtenez  $\frac{1}{R}$  comme rayon de courbure.

Sachant en effet que la dérivée seconde est le rayon de courbure du cercle tangent à la courbe, on réécrit :

### 🔑 Key Outcome : Loi de Young-Laplace

La différence de pression causée par la courbure d'une surface vaut

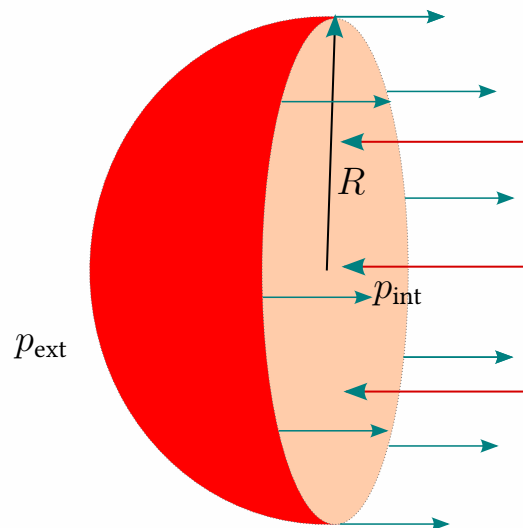
$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (7.3)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure principaux de la surface courbe. La pression est moins élevée du côté convexe, et plus élevée du côté concave.

### ✍ Application : Surpression à l'intérieur d'une goutte

Nous pouvons nous convaincre de la cohérence de la théorie ci-dessus en calculant la surpression à l'intérieur d'une goutte de deux façons différentes. La plus simple est d'utiliser la loi de Young-Laplace. Pour une goutte sphérique de rayon  $R$ , nous avons  $\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{2\gamma}{R}$ .

Cependant, nous pouvons également faire un bilan hydrostatique : la force exercée sur une surface plane coupant la goutte en deux ( $\Delta p \pi R^2$ ) doit compenser très exactement la force, exercée dans l'autre sens, qui naît de la tension de surface, telle que définie en (7.2) :  $\gamma L = \gamma 2\pi R$ .



Si on a affaire à une bulle plutôt qu'à une goutte, il faut tenir compte des

tensions générées par les deux interfaces, air-eau (techniquement : vapeur-eau) et eau-air, par exemple. La surpression est donc doublée par rapport à une goutte : à l'intérieur d'une bulle, la surpression est de  $4\gamma/R$ , où  $\gamma$  est la tension de surface associée à l'interface gaz-liquide.

Nous venons d'éclaircir un mystère : sachant que la tension de surface de l'interface air-eau est d'environ 72 mN/m, et que la tension de surface à l'interface air-eau savonneuse est plutôt de l'ordre de 25 mN/m, nous voyons pourquoi les bulles d'eau savonneuse sont beaucoup plus stables que celles d'eau.

### 7.3 Interfaces triples : Young - Dupré

La loi qui détermine la valeur de l'angle de contact en fonction des tensions de surface pour une interface triple (par exemple, liquide-solide-gaz) est appelée loi de Young-Dupré. Elle exprime une condition d'équilibre en surface, sachant que les tensions s'expriment de façon tangente à la surface (Figure 7.1, en bas à droite). Cette loi s'exprime par :

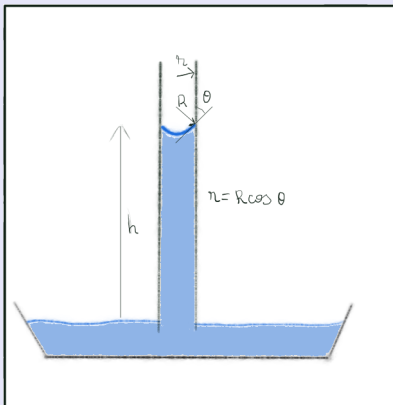
$$\cos(\theta) = \frac{\gamma_{sg} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lg}},$$

où :

- $\theta$  est l'angle de contact,
- $\gamma_{sg}$  est la tension de surface entre le solide et le gaz,
- $\gamma_{sl}$  est la tension de surface entre le solide et le liquide,
- $\gamma_{lg}$  est la tension de surface entre le liquide et le gaz.

Si  $\cos(\theta) > 1$ , l'équilibre ne peut être atteint et on est dans le cas d'un mouillage total; si  $\cos(\theta) < -1$ , l'équilibre ne peut être atteint mais on est cette fois dans le cas d'un mouillage nul.

Voyez maintenant comment mettre du savon augmente le mouillage.

 **Loi de Jurin**


La loi de Jurin établit une relation entre l'angle de contact  $\theta$ , la hauteur de la colonne et le rayon du tube capillaire  $r$ . Déterminez cette relation, en considérant que la pression atmosphérique est la même au sommet de la colonne qu'à la surface du réservoir.

#### 7.4 Ondes de gravité - capillarité

On considère un écoulement proche à deux dimensions ( $x$  selon l'horizontale,  $z$  selon la verticale) proche de l'interface liquide - gaz localisée en  $z = \eta(x)$ . On néglige la viscosité.

Imposons une interface horizontale avec l'atmosphère. Nous cherchons une équation d'évolution pour une légère perturbation par rapport au repos. Si on admet que l'écoulement est (et reste) irrotationnel, la vitesse s'exprime comme un gradient de potentiel scalaire :  $\mathbf{u} = (u, w) = -\nabla\phi$ . L'équation de Bernoulli non-stationnaire (4.6) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi = -\nabla \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) \quad (7.4)$$

Si la pression au-dessus de l'interface est constante (par exemple, la pression atmosphérique), alors l'anomalie de pression juste en dessous de la surface vaudra  $-\gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ . L'anomalie de géopotential, par rapport à un niveau de référence (fluide au repos), vaudra quant à elle  $g\eta(x)$ .

On considère de petites perturbations. Par conséquent, on néglige le terme de second ordre  $u^2$ . L'équation (7.4) devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left( C - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g\eta \right), \quad (7.5)$$

où  $C$  est une constante d'intégration.

La dérivée matérielle de l'élévation  $\eta$ ,  $\frac{D\eta}{Dt}$ , est la vitesse verticale de l'interface,  $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ . À nouveau, pour de petites perturbations, on néglige le terme d'advection et il reste  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = w$ . On utilise cette propriété en dérivant (7.5) par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial x^2} - g \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (7.6)$$

C'est une équation différentielle qui invite à une solution de type  $\phi = \hat{\phi}(z)e^{i(kx-\omega t)}$ , c'est-à-dire une onde progressive. On doit tenir compte de deux conditions. Tout d'abord,  $\phi$  doit satisfaire l'équation de Laplace. Ensuite,  $\phi$  doit s'annuler en  $z \rightarrow -\infty$  (eau très profonde). La forme qui satisfait naturellement ces conditions est :

$$\phi(x, z) = e^{kz} e^{i(kx-\omega t)}$$

En introduisant cette forme dans (7.6), on obtient la relation de dispersion des ondes gravité-capillarité :

$$\omega^2 = \frac{\gamma k^3}{\rho} + gk \quad (7.7)$$

Ce sont des ondes dispersives dont la vitesse de phase vaut :

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \pm \left( \frac{\gamma k}{\rho} + \frac{g}{k} \right)^{1/2}$$

 **Relation de dispersion des ondes gravité - capillarité**

Tracez l'allure générale de la vitesse de phase des ondes que nous venons d'obtenir. On voit apparaître deux régimes : à quoi correspondent-ils ? Quels sont les processus physiques dominants pour les valeurs de  $k$  faibles (longues ondes) et élevées (ondes courtes) ? Quelle est la longueur typique ( $2\pi/k$ ) correspondant à la transition entre les deux régimes pour l'eau ( $\gamma = 72 \text{ mN/m}$  à  $20^\circ\text{C}$ ) ? Selon vous, quel régime est excité par une goutte d'eau qui tombe dans un évier ? Une pierre dans un étang ?



## Chapitre 8

# Conservation de l'énergie

### 8.1 Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de l'énergie mécanique s'obtient en prenant le produit scalaire de la conservation de la quantité de mouvement avec la vitesse.

En mécanique du point, cela se traduit par l'équation

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &= m \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt}.\end{aligned}$$

Une équation analogue existe pour la mécanique des milieux continus. Cependant, il faut repartir de sa forme différentielle exprimée par l'équation de Navier-Stokes (5.6) :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \Phi + \nabla \cdot \underline{\underline{T}}$$

Pour obtenir l'équation de conservation d'énergie mécanique, il faut pré-multiplier les deux membres de l'équation par  $\mathbf{u} \cdot$ . Le mieux est de décomposer l'expression par indice. On trouve, pour l'indice  $i$ , avec une somme sur les indices  $j$  :

$$\begin{aligned}
& u_i \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\rho u_i \Phi_i + u_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \\
\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u_i^2 \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} u_i^2 \right) \right) &= \dots \\
\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i^2 \right) &= \dots \\
\sum_i : \quad \rho \frac{D}{Dt} \underbrace{\left( \frac{1}{2} u^2 \right)}_k &= \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{T}}
\end{aligned}$$

où, pour la dernière étape, on a sommé sur les indices  $i$ . On définit  $k$  comme l'énergie cinétique massique (par unité de masse), et  $K = \rho k$ . On peut gagner en clarté en remarquant que  $\frac{D\Phi}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi$  car  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ . L'équation de conservation de l'énergie mécanique prend alors une forme conservative plus intuitive :

$$\rho \frac{D}{Dt} (k + \Phi) = \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (8.1)$$

L'écriture est intuitive car elle exprime que la variation totale d'énergie mécanique d'une particule lagrangienne est déterminée par le travail mécanique exercé sur elle.

Comme nous l'avons vu (eq. 5.4),  $\underline{\underline{T}}$  est la somme des contraintes de pression, isotropes, et des contraintes de cisaillement. Le travail contre ces contraintes se retrouve dans le second terme du membre de droite de la dernière équation. Tentons de le préciser.

## 8.2 Forme intégrale de la conservation de l'énergie mécanique

On fait usage de l'équivalence issue du théorème de Reynolds (1.22) :

$$\rho \frac{D}{Dt} (k + \Phi) = \frac{\partial}{\partial t} (K + \rho \Phi) + \nabla \cdot (\mathbf{u} (K + \rho \Phi)) = \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{T}}$$

On intègre sur un volume matériel :

## 8.2. FORME INTÉGRALE DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE 97

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial t} (K + \rho\Phi) \, dV + \int_A (K + \rho\Phi) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA}_{\frac{d}{dt} \int_V \rho(k + \Phi) \, dV} = \int_V \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \, dV$$

On voudrait bien faire apparaître une divergence dans l'intégrale de droite, de façon à introduire une intégrale sur la frontière.

On utilise pour cela :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{T}}) &= \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \underline{\underline{T}}) - \underline{\underline{T}} : (\nabla \mathbf{u}) \\ \dots &= \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \underline{\underline{T}}) - \tau : (\nabla \mathbf{u}) + p \nabla \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

où  $\tau : \nabla \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{ij} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

L'équation de conservation de l'énergie mécanique prend maintenant une forme qui nous rappelle que l'énergie mécanique d'un système varie en réponse au travail de la force résultante *et* de celui associé à la déformation du volume matériel :

### 🔑 Key Outcome : Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V (K + \rho\Phi) \, dV \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} (K + \rho\Phi) \, dV + \int_A (K + \rho\Phi) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA \\ &= \int_A \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad \text{Puissance nette reçue aux frontières} \quad (8.2) \\ &+ \int_V p \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV \quad \text{Puissance de compression} \\ &- \int_V \underline{\underline{\tau}} : (\nabla \mathbf{u}) \, dV \quad \text{Puissance dissipée par viscosité} \end{aligned}$$

Le dernier terme est la dissipation visqueuse, que l'on réécrit :

$$\int_V \mathcal{D} \, dV \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=}} 2\mu e_{ij} e_{ij} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u})^2$$

### 8.3 Équations thermodynamiques

#### 8.3.1 Forme intégrale du premier principe de la thermodynamique

(P. K. KUNDU et COHEN 2004, p. 108)

L'énergie totale (énergie interne + énergie cinétique et géopotentielle) varie selon le travail effectué contre l'extérieur, et l'apport de chaleur à travers les frontières du domaine, et la chaleur produite à l'intérieur du domaine (e.g. : réactions chimiques)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(e + k + \Phi) d\mathcal{V} = \int_A (\mathbf{u} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \mathbf{n} dA - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{V}} Q d\mathcal{V} \quad (8.3)$$

On soustrait (8.2) pour obtenir une équation pour l'énergie interne (on se rappelle que  $E = \rho e$ ,  $K = \rho k$ ) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} E d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} p \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} d\mathcal{V} - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{V}} Q d\mathcal{V}$$

On réécrit le dernier terme sous la forme  $-\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{q} d\mathcal{V}$  pour obtenir la conservation de l'énergie interne sous la forme lagrangienne :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q \quad (8.4)$$

La variation d'énergie interne est causée par la divergence du flux de chaleur  $\nabla \cdot \mathbf{q}$ , l'apport de chaleur par des processus diabatiques, et le travail contre les forces de pression et la dissipation visqueuse. Si le terme de dissipation s'annule, le travail se réduit à la contribution réversible  $-p \nabla \cdot \mathbf{u}$ , qui est l'analogue local de  $-p \Delta V$  en thermodynamique classique. En effet, l'intégrale volumique de  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  représente la variation du volume matériel. Ainsi, l'équation locale de l'énergie interne retrouve exactement la structure du premier principe de la thermodynamique, avec une séparation claire entre contributions réversibles et irréversibles. Cette correspondance était loin d'être évidente a priori : nous n'avons pas exigé que le travail prenne, de manière aussi naturelle, une forme distinguant explicitement une contribution réversible et une contribution irréversible. Le terme de

pression joue ici son juste rôle. L'équation à laquelle nous avons abouti constitue un aboutissement théorique significatif, révélant la cohérence profonde entre la mécanique des milieux continus et la thermodynamique.

### 8.3.2 Équation de la chaleur

Considérons, d'une part, que nous avons affaire à un gaz ou un fluide parfait, tel que son énergie interne est liée à la température sous la forme  $E = C_v T$ .

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q \quad (8.5)$$

Il est possible de travailler encore cette relation. On peut le faire de façon relativement intuitive et informelle. Voyons en effet que la relation (8.4) est l'équivalent en milieu continu de la relation vue en thermodynamique :

$$M \Delta T = -p \Delta V + \text{termes diabatiques et transport,}$$

où  $V$  est le volume. En effet,  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  n'est autre que le taux d'expansion du volume d'un élément de fluide. On connaît l'expression équivalente, en thermodynamique, de la conservation de l'enthalpie :

$$M C_p \Delta T = V \Delta p + \text{termes diabatiques et transport,}$$

On peut donc anticiper une relation sous la forme, pour un gaz parfait :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mathcal{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + Q \quad (8.6)$$

Voyons comment c'est possible. L'équation de continuité (1.20), combinée à la décomposition différentielle de  $\rho$  selon les variables  $T$  et  $p$  (principes des variables d'état en thermodynamique) :

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \\
&= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{Dp}{Dt} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} -\alpha \frac{DT}{Dt} + \beta_T \frac{Dp}{Dt}
\end{aligned} \tag{8.7}$$

En termes thermodynamiques (ou de chimie physique),  $\alpha$  est le coefficient d'expansion thermique, et  $\beta_T$  la compressibilité isotherme.

Sous l'hypothèse des gaz parfaits,  $p = \rho RT$ ,  $\alpha = \frac{1}{T}$ ,  $\beta_T = 1/p$  et  $R = C_p - C_v$ . On voit alors comment passer de (8.4) à (8.6).

## 8.4 Hypothèse de Boussinesq

### 8.4.1 Définition et contexte

P. K. KUNDU et COHEN 2004, sect 4.18, p. 108. Boussinesq 1903. Formal justification in Spiegel and Veronis (1960).

- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (pour l'équation de continuité, l'écoulement est incompressible)
- On néglige les variations de  $\rho$ , sauf dans le terme qui implique le géopotential. Cela permet de préserver les effets associés à la flottaison.

### 8.4.2 Equation de continuité

On écrit d'abord :  $p = p_0 + p'$  et  $\rho = \rho_0 + \rho'$ .  $p_0$  et  $\rho_0$  sont liés par l'équilibre hydrostatique.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho' + \rho_0 \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{8.8}$$

### 8.4.3 Equation du mouvement

On fait également l'approximation de Stokes. On part donc de (5.7) (on définit  $\nu = \mu/\rho$ ), et on supprime, à nouveau, les termes d'anomalie de densité sauf quand ils produisent un gradient de force via le géopotential :

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla \Phi + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (8.9)$$

Les équations (8.8) et (8.9) régissent l'écoulement sous l'approximation de Boussinesq.

Nous étudierons un peu plus loin les conditions justifiant l'approximation de Boussinesq, mais concrètement on peut déjà voir qu'il faut que les variations relatives de densité ( $\delta\rho/\rho$ ) soient bien plus petites que les variations relatives de vitesse  $\delta U/U$ .

#### 8.4.4 Implication sur l'équation de conservation d'énergie

En supprimant des termes dans l'équation du mouvement, l'approximation de Boussinesq altère la cohérence de la conservation de l'énergie. En effet, reprenons notre relation thermodynamique (8.7) :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha \frac{DT}{Dt} + \beta_T \frac{Dp}{Dt}$$

On voit d'emblée qu'exiger  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  tue toute la thermodynamique, ce qui rend l'équation de la chaleur tout à fait inutilisable.

L'approximation de Boussinesq procède d'une double inégalité.

D'une part, nous avons exigé dans l'équation de continuité que  $\frac{D\rho}{Dt} \ll \rho \nabla \cdot \mathbf{u}$ . Pour mettre en relation ces deux termes, il faut faire apparaître la composante advective de  $\frac{D\rho}{Dt}$ . Cette composante est de l'ordre de  $U\delta\rho/L$ . On trouve alors que cette condition impose :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1.$$

Comme on l'a vu, ce terme est petit, mais nous n'avons pas le droit de le négliger complètement car il demeure significatif dans le bilan thermodynamique. Nous avons cependant vu avec la relation (8.7) que la variation de densité peut être causée par une variation de température ou une variation de pression. L'approximation de Boussinesq va spécifiquement chercher à éliminer les ondes de pression, donc cibler spécifiquement le terme impliquant  $\frac{Dp}{Dt}$ . On demande donc que :

$$\beta_T \delta p \ll \alpha \delta T \simeq \frac{\delta \rho}{\rho}$$

En pratique, cela revient à exiger que les variations de densité soient exclusivement dues à des effets de flottabilité thermique (à l'origine des mouvements de convection), et non à des ondes de pression. Cette condition est remplie tant que l'écoulement a une vitesse faible par rapport à la vitesse du son. On parle d'écoulements à faible "nombre de Mach" ( $Ma = u/c$ ,  $c$ , la vitesse des ondes de pression).

On montre par ailleurs (P. K. KUNDU et COHEN 2004, p. 120) que sous ces conditions, la génération thermique due à la dissipation visqueuse est tout à fait négligeable, si bien que l'équation de la chaleur se réduit à :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + Q$$

Dans un modèle Newtonien du transport de chaleur :  $\mathbf{q} = -\rho C_p \kappa \nabla T$ , avec  $\kappa = k/(\rho C_p)$  est la diffusivité thermique. On a alors l'équation de la chaleur.

 **Key Outcome : Equation de la chaleur sous l'hypothèse de Boussinesq**

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (8.10)$$

Cette équation est donc découplée de l'équation du mouvement. Elle permet d'évaluer  $\rho(T)$ , nécessaire car elle intervient dans le terme de flottaison qui, elle, intervient dans l'équation du mouvement. Ce découplage partiel entre équation thermique et équation du mouvement s'opère au prix d'une violation du principe de conservation d'énergie, puisque la chaleur dégagée par dissipation visqueuse a disparu de (8.10). Comme dit plus haut, cette simplification est amplement justifiée dans la plupart des applications à faible nombre de Mach (faible vitesse par rapport à la vitesse du son) telles que, notamment, en océanographie et météorologie dynamique.

**8.4.5 L'approximation de Boussinesq dans l'atmosphère**

À l'échelle verticale de l'atmosphère, on ne peut pas dire que  $\delta p/p \ll 1$ . Il nous faut donc une astuce pour filtrer les ondes de pression sans détruire la convection atmosphérique profonde. Cette astuce consiste à changer de variables thermodynamiques. On introduit la température potentielle : il s'agit de la température d'une parcelle d'air amenée adiabatiquement depuis une pression de référence  $p_0$  à la pression  $p$ . On montre que :

$$\theta = T (p_0/p)^{R/C_p}$$

Ensuite, on utilise les variables thermodynamiques  $\theta, p$  plutôt que  $T, p$  :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_p \frac{D\theta}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\theta \frac{Dp}{Dt} \quad (8.11)$$

L'approximation de Boussinesq consiste alors à négliger le second terme.



## Annexe A

# Transformations des tenseurs de Rang 2

### A.1 Transformation des coordonnées

Un tenseur de rang 2, comme le gradient de vitesse  $\nabla \mathbf{u}$ , n'est pas une simple matrice de chiffres; c'est un opérateur linéaire dont les composantes dépendent de la base choisie.

Si l'on passe d'une base orthonormée  $\mathcal{B}$  à une nouvelle base  $\mathcal{B}'$  via une matrice de rotation  $\underline{\underline{R}}$  (où  $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$ ), les composantes d'un vecteur se transforment selon  $\underline{\underline{u}}' = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{u}}$ . Pour qu'une relation physique telle que  $\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{T}}\underline{\underline{x}}$  reste valide dans toutes les bases, les composantes du tenseur doivent suivre la règle de transformation suivante :

$$\underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{T}}\underline{\underline{R}}^T \quad (\text{A.1})$$

En notation indicielle (convention de sommation d'Einstein), cela s'écrit :

$$T'_{ij} = R_{ik}R_{jl}T_{kl} \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Invariants scalaires

Puisque la transformation ci-dessus est une transformation de similitude, certaines propriétés de la matrice restent inchangées quel que soit le système de coordonnées. Ces **invariants** ont souvent une signification physique :

- **La Trace** :  $\text{Tr}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}(\mathbf{u})$  représente le taux

de dilatation volumique local (somme des valeurs propres). Pour un fluide incompressible, cet invariant est nul partout.

- **Le Déterminant** :  $\det(\nabla \mathbf{u})$  caractérise le changement de volume du domaine fluide sous l'action du flot (produit des valeurs propres).

### A.3 Décomposition Symétrique et Antisymétrique

Tout tenseur de rang 2 peut être décomposé de manière unique en une partie symétrique  $\underline{\underline{S}}$  et une partie antisymétrique  $\underline{\underline{\Omega}}$  :

$$\nabla \mathbf{u} = \underbrace{\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)}_{\underline{\underline{S}} \text{ (Tenseur des taux de déformation)}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T)}_{\underline{\underline{\Omega}} \text{ (Tenseur de rotation/vorticité)}} \quad (\text{A.3})$$

Cette décomposition est elle-même invariante. Cela signifie que l'existence de dilatation  $\underline{\underline{S}}$  ou de rotation  $\underline{\underline{\Omega}}$  ne dépend pas de l'observateur. On peut montrer que

$$(\nabla \mathbf{u})' = S' + \Omega',$$

$$\text{avec } S' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{R}}^T \text{ et } \omega' = \underline{\underline{R}} \omega \underline{\underline{R}}^T.$$

#### Invariance de la trace

Vérifier l'invariance de la trace pour une rotation  $\underline{\underline{R}}$  quelconque, satisfaisant  $R^T R = I$ , équivalent à  $R^T = R^{-1}$ . Astuce : on peut utiliser la notation d'Einstein.

# Index

- accélération, 13, 26, 32
- action-réaction, 31
- analogie routière, 21
- analyse complexe, 57
- angle de contact, 90
- approximation de Stokes, 65
- atomes, 14
  
- barotrope, 27
- bulle, 89
  
- champ, 14
- champs, 13, 14
- chocs, 14
- coefficient de viscosité, 63
- compression élastique, 31
- conditions de Cauchy-Riemann, 51
- conservation, 95
- continu, 14
- contrainte tangentielle, 62
- couche limite, 78
  
- densitomètre, 30
- description lagrangienne, 43
- diffusivité thermique, 102
- débit massique, 39
- dérivée, 13
- dérivée eulérienne, 16
  
- dérivée lagrangienne, 16, 18
- dérivée matérielle, 16
  
- effet Magnus, 58
- entropie, 14
- espace, 14
  
- fluide, 14
- fonction analytique, 51
- fonction de courant, 43
- fonction de flot, 37, 44
- force, 26
- forces, 13
- forces externes, 26
- friction, 31
  
- goutte, 89
- gradient, 16
- gradient du champ de vitesse, 32
- gradient d'un potentiel, 26
- granularité moléculaire, 14
- géopotential, 26, 27
  
- interactions, 83
- interface, 26
- isotrope, 84
  
- laplacien, 63
- ligne de chemin, 44
- ligne de courant, 36

- ligne de trace, 44
- loi de Young-Dupré, 90
- masse volumique, 13, 27
- milieu, 13
- milieu continu, 13, 14, 26
- molécules, 13, 14
- moment cinétique, 13, 26
- moment de force, 28
- mécanique classique, 13
- mécanique des fluides, 16
- météorologie, 16
- nombre de Reynolds, 70, 77
- non-slip boundary conditions, 67
- ondes gravité-capillarité, 92
- paradoxe de d'Alembert, 58
- particule fluide, 17
- particule Lagrangienne, 32
- point de vue statistique, 14
- points de stagnation, 37
- portance, 57
- potentiel, 26
- potentiel de liaison, 86
- potentiel scalaire, 91
- potentiel vecteur, 42
- poussée d'Archimède, 27
- pression, 13, 14
- pression dynamique, 65
- pression moyenne, 65
- pression statique, 26, 64
- problème de sédimentation, 77
- profil vertical de pression
  - atmosphérique, 31
- Rayleigh-Bénard, 40
- rayon de courbure, 88
- relation de dispersion, 92
- relation de Leibniz, 18
- relation hydrostatique, 26
- seconde loi de Newton, 26
- section connexe, 37
- similarité dynamique, 76
- source de  $\vec{F}$ , 24
- spirale de Riemann, 54
- statistique, 13
- temps, 14
- température, 13, 14
- température potentielle, 103
- tenseur, 26, 32
- tenseur des contraintes, 26, 64
- tenseur des déformations, 65
- tension de surface, 86, 90
- thermodynamique, 13
- théorème de Blasius, 57
- théorème de Buckingham, 75
- théorème de Gauss, 27
- théorème de Gauss -
  - Ostrogradsky, 25
- théorème de Kutta-Zhukovsky,
  - 58
- théorème de Taylor-Proudman,
  - 40
- théorème du transport de
  - Reynolds, 23
- trajet libre moyen, 14
- transformation conforme, 58
- traînée, 57
- tube de courant, 38
- viscosité cinématique, 76
- vitesse, 13
- volume de fluide, 26

volume matériel, 18

vorticité, 41, 48

écoulement de Poiseuille, 64

écoulement laminaire, 35

écoulement rotationnel, 41

écoulement stationnaire, 36

écoulement turbulent, 33, 77

élément matériel, 16

énergie, 13

équation de continuité, 21

équation du mouvement, 26

équation d'Euler, 32

équilibre dynamique, 33

équilibre hydrostatique, 27

équilibre statique, 26

équilibre thermodynamique, 13,

14