

# Géodésie et projections cartographiques

## LGEO1242

Syllabus

2024 – 2025

Michel Crucifix

Faculté des Sciences

**Avertissement**

Ces notes seront un jour publiées sous licence libre mais elles ne sont pas prêtes. Il est demandé aux étudiants de ne pas les diffuser à ce stade.

**Azimut en astronomie et en cartographie**

En astronomie, l'azimut est régulièrement défini comme un angle compté à partir du méridien local, au Sud, à la manière des astronomes. C'est cette convention que nous utilisons dans les chapitres 7 et 8. L'azimut des géographes, utilisé pour la navigation, est plus traditionnellement compté à partir du Nord. C'est une source de confusion que nous tenterons de limiter en étant le plus explicites possible.

## Contents

<b>0 Introduction</b>	<b>7</b>
0.1 Qu'est-ce que la géodésie ?	7
0.2 Projections cartographiques	8
0.3 Préparer votre assistance au cours	8
0.4 Évaluation	9
0.5 Calendrier	9

## PART I: GÉODÉSIE

<b>1 Trigonométrie plane et coordonnées cartésiennes</b>	<b>10</b>
1.1 Le cercle trigonométrique	10
1.2 Sinus et cosinus	11
1.3 Relation de Pythagore	12
1.4 Développements en série (en radians)	16
1.5 Résolution d'un triangle	16
1.6 Applications géodésiques	18
<b>2 Se positionner dans le plan sur base de repères</b>	<b>20</b>
2.1 Coordonnées cartésiennes	20
2.2 Détermination des coordonnées d'un point sur base de deux observations d'azimut	21
2.3 Déterminer sa position par l'observation des angles entre trois points connus	23
2.3.1 Théorème du triangle inscrit	23
2.3.2 Détermination de la position des centres des cercles en coordonnées cartésiennes	27
2.3.3 Intersection de deux cercles	28
<b>3 Définitions du géoïde et coordonnées géographiques</b>	<b>31</b>
3.1 Coordonnées sphériques	31
3.2 Théorie du géopotentiel	32
3.3 Latitude géodétique et géocentrique	39
3.4 Géoïde	42

3.5 En savoir plus: . . . . .	44
<b>4 Relations de trigonométrie sphérique</b>	<b>45</b>
<b>5 Orthodromie et loxodromie sur la sphère</b>	<b>51</b>
5.1 Orthodromie . . . . .	51
5.2 Loxodromie . . . . .	53
<b>6 Trilatération par satellite</b>	<b>57</b>
6.1 Le GNSS . . . . .	57
6.2 Trilatération . . . . .	58
<b>7 Les sphères célestes</b>	<b>61</b>
7.1 La sphère céleste locale . . . . .	61
7.2 Les coordonnées horizontales (également appelées azimutales)	62
7.3 Coordonnées horaires . . . . .	62
7.4 Transformation des coordonnées horizontales aux coordonnées horaires . . . . .	63
7.5 La sphère céleste (des fixes) . . . . .	65
7.6 Détermination de la longitude d'un lieu sur base astronomique	66
<b>8 Les mouvements diurnes, annuels, et définition du temps</b>	<b>70</b>
8.1 Le mouvement diurne . . . . .	70
8.2 Astres sans lever et coucher . . . . .	72
8.3 Le mouvement du Soleil . . . . .	72
8.4 L'écliptique et les coordonnées écliptiques . . . . .	73
8.5 Le mouvement annuel du Soleil . . . . .	76
8.5.1 Cercles polaires . . . . .	78
8.5.2 Tropiques . . . . .	78
8.6 Le temps solaire vrai . . . . .	79
8.7 La durée du jour solaire excède celle du jour sidéral . . . . .	80
8.8 Le temps universel . . . . .	80
8.9 La définition de la seconde . . . . .	81
8.10 Synthèse: Deux problèmes types . . . . .	83

---

## PART II: PROJECTIONS CARTOGRAPHIQUES

<b>9 Principes généraux de cartographie</b>	<b>86</b>
9.1 Le globe générateur . . . . .	86
9.2 Définir une projection . . . . .	87
9.3 Les indicatrices de Tissot . . . . .	88
9.4 Préservation des aires . . . . .	96
9.5 Préservation des angles . . . . .	97
<b>10 Projections cylindriques</b>	<b>101</b>
10.1 Définition d'une projection cylindrique . . . . .	101
10.2 La projection de Mercator (XVIIe siècle) . . . . .	102
10.3 Projections équivalentes . . . . .	104
10.4 La projection plate carrée . . . . .	105
10.5 Projections pseudo-cylindriques . . . . .	105
10.5.1 Principe . . . . .	105
10.5.2 Projection Mollweide (1805) . . . . .	106
10.5.3 Projection Eckert IV (1906) . . . . .	109
10.6 Cylindriques transverses . . . . .	110
10.6.1 Pseudo-coordonnées $\phi'$ et $\lambda'$ . . . . .	110
10.6.2 Projection de Cassini . . . . .	112
10.6.3 Projection transverse de Mercator et système UTM . . . . .	114
10.6.4 Système de coordonnées universel : UTM . . . . .	115
<b>11 Projections coniques</b>	<b>117</b>
11.1 Définition d'une projection conique . . . . .	117
11.2 Projections coniques conformes . . . . .	119
11.2.1 Dérivation . . . . .	119
11.3 Choix de $\alpha$ . . . . .	121
11.3.1 $\alpha$ tel que la latitude à laquelle l'échelle est minimale. . . . .	121
11.3.2 Paramètre $\alpha$ tel que l'échelle est identique pour <i>deux</i> latitudes arbitraires. . . . .	121
11.3.3 Paramètre $\alpha$ tel que la variance de l'échelle est minimale . . . . .	121
11.4 Projections coniques équivalentes . . . . .	122
11.5 $\alpha$ tel que la latitude à laquelle l'échelle le long d'un méridien est minimale. . . . .	123

11.6	Paramètre $\alpha$ tel que l'échelle le long d'un méridien est identique pour <i>deux</i> latitudes arbitraires. . . . .	123
11.7	Projections équidistantes . . . . .	123
<b>12</b>	<b>Projections azimutales</b>	<b>125</b>
12.1	Formule générale de la projection azimutale . . . . .	125
12.1.1	Illustration graphique . . . . .	125
12.1.2	Coordonnées azimutales locales . . . . .	125
12.1.3	Définition mathématique des coordonnées azimutales . . . . .	127
12.1.4	Projection orthographique . . . . .	129
12.1.5	Projection gnomonique . . . . .	131
12.1.6	Projection stéréographique . . . . .	132
12.1.7	Projection équivalente . . . . .	133
12.2	Classification en fonction du point de référence: . . . . .	134
<b>A</b>	<b>Appendice: représentation algébrique des propriétés de l'indicatrice</b>	<b>135</b>
<b>B</b>	<b>Appendice: incréments de distance sur l'ellipsoïde</b>	<b>138</b>
B.1	Le long d'un parallèle . . . . .	138
B.2	Le long d'un méridien . . . . .	139
Git version HEAD:cb6ef31 of Fri May 15 16:34:39 2026 +0200		

## 0 Introduction

Bienvenue au cours de *projections cartographiques et géodésie*. Le cours est une évolution de l'ancien cours de "Géographie mathématique" dont il a conservé le même code et, essentiellement, la même structure mais nous l'avons adapté et complété. L'équipe enseignant a été renouvelée en 2022-2023. J'enseigne avec la collaboration de Julie Bocken, assistant, et qui encadrera 6 séances d'exercices. Le cours théorique comporte 12 séances.

Les notes de cours, qui ont été entièrement réécrites, sont en cours de consolidation. Il est très vraisemblable que des mises à jour seront mises à disposition en cours d'année. Pour cette raison, je vous encourage à ne pas (trop) imprimer à l'avance.

### 0.1 Qu'est-ce que la géodésie ?

Selon la définition de *Wikipedia*, la géodésie est "la science, destinée à l'origine au tracé des cartes, qui s'est attachée à résoudre le problème des dimensions, puis de la forme de la Terre, ce qui fait d'elle, à son origine, la première forme de la géographie moderne". L'Oxford English Dictionary donne une définition à peu près équivalente: *the branch of science and mathematics concerned with the precise measurement of the shape of the earth and of areas and positions on its surface, and with the spatial properties of the earth's gravitational field*.

En clair, nous faisons de la géodésie dès qu'il s'agit de définir une latitude, une longitude, la verticale et l'horizontale; de déterminer une position ou une distance entre deux points nous faisons de la géodésie. Nous verrons par exemple comment déterminer une position par satellite. Par extension, la géodésie moderne s'occupe du champ gravitationnel de la Terre. En effet, le niveau des mers est, est en

première approximation, une surface d'égale géopotential. L'altitude d'un point sur Terre se mesure par rapport à cette surface. Les orbites des satellites suivent des trajectoires qui sont conditionnées par le champ gravitationnel de la Terre. La mesure de la dérive des continents et des lentes déformations de la Terre relève également de la géodésie physique, mais cette matière dépasse l'objet du cours. Nous aurons par ailleurs l'occasion de brèves incursions vers la géophysique, par exemple pour évoquer le mécanisme qui génère le champ magnétique terrestre.

## 0.2 Projections cartographiques

L'histoire de la géodésie est étroitement liée à celle de la cartographie. On cite généralement Eratosthène de Cyrène (276 BC – c. 195/194 BC) pour avoir été le premier à calculer la circonférence de la Terre, l'inclinaison de l'axe des pôles sur le plan de l'orbite terrestre. C'est également l'inventeur du mot "géographie". Il réalisa une carte du monde sur laquelle il a placé des méridiens et des parallèles, ces derniers formant la base d'une division de la Terre en zones climatiques.

La richesse des projections cartographiques tient au fait qu'une sphère ne peut pas être projetée sur un plan sans être déformée. Selon que l'on privilégie une représentation fidèle des distances, des directions, ou des aires, on obtiendra des projections très différentes. La projection de Mercator, utilisée notamment sur Google Map, est fameuse pour donner une taille démesurée au Groenland et à l'Antarctique. Nous verrons pourquoi. Le choix d'une projection dépend donc de l'usage que l'on en fait, mais elle est également un instrument politique.

## 0.3 Préparer votre assistance au cours

La pédagogie s'inspire du mouvement de "slow teaching" : on préfère se donner le temps de travailler les concepts en profondeur que de chercher

à couvrir une grande quantité matière. Le syllabus n'en fait pas moins plus de 130 pages ! Le cours est donné au tableau, interrompu par des petits exercices. Chaque séance de cours correspond *grosso modo* à un chapitre (voir le calendrier sur Moodle). Vous êtes fortement encouragés à lire le chapitre avant de venir au cours. Cela rendra la science théorique beaucoup plus fluide et vous permettra de vous concentrer sur la compréhension de la matière. Le cours fait un usage intensif des mathématiques. Elles sont toutes au niveau de ce qu'on peut attendre pour les étudiantes et étudiants suivant un programme de bachelier en sciences, mais maîtriser les mathématiques n'est jamais instantané. Le temps que vous consacrerez à la préparation du cours en amont sera gagné deux fois: vous tirerez davantage parti de la séance de cours, et grâce à cela, vous appréhendez plus facilement les exercices: cela réduira d'autant votre temps d'étude.

Dernier conseil: venez au cours équipé d'une règle, crayon, gomme, et compas.

## 0.4 Évaluation

Deux projets (à réaliser par groupes de 2 étudiants) seront à réaliser en cours de quadrimestre. Ils feront l'objet d'un rapport qui doit être rendu pour la semaine 13 (via Moodle). Le rapport écrit est évalué et compte pour un quart de la note finale. Il ne peut donner lieu à une représentation.

L'examen oral est organisé pendant la session d'examen. Il comportera deux exercices, et une questions de théorie. L'étudiant peut utiliser un formulaire mis à disposition sur Moodle.

## 0.5 Calendrier

Le calendrier du cours est disponible sur Moodle.

## PART I:

# GÉODÉSIE

### 1 Trigonométrie plane et coordonnées cartésiennes

#### 1.1 Le cercle trigonométrique

Cette section constitue des rappels de la 3<sup>e</sup> secondaire.

Soit un cercle de rayon  $r$ , et un angle  $A$ , exprimé en *radians*

#### DEFINITION 1 Radian

Un angle de 1 radian intercepte un arc de longueur égale au rayon  $= r$ . Donc : Un angle de  $A$  radians intercepte un arc de longueur  $A \cdot r$ .

Par conséquent, un tour complet représente un angle de  $2\pi$  radians (la circonférence  $= 2\pi r$ )

C'est aussi  $360^\circ$ . On a donc:  $2\pi$  radians  $= 360^\circ$ .

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ degrés}$$

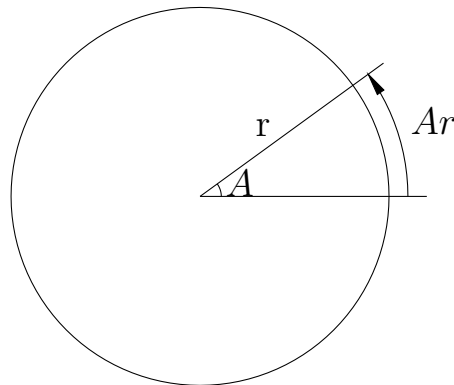


Figure 1: Un angle  $A$  sur le cercle sous-tend un arc de longueur  $Ar$

Le degré se subdivise en minutes ( $'$ ) et secondes ( $''$ ), telles que

$$1' = 60''$$

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

Le tour complet peut également se subdiviser en 24 heures:

$$\text{on a: } 2\pi = 360^\circ = 24 \text{ heures}$$

$$1 \text{ heure} = 15^\circ$$

l'heure se divise en minutes ( $m$ ) et secondes ( $s$ ) telles que  $1 \text{ h} = 60 \text{ m} = 3600 \text{ s}$ .

Soyez donc prudents à la subtilité de notation: une minute d'heure se note ' $m$ ', une minute de degré se note ' $'$ ', la première étant 15 fois plus grande que la seconde.

## 1.2 Sinus et cosinus

Les sinus et cosinus sont les fonction trigonométriques qui renvoient la longueur des côtés d'un triangle rectangle, proportionnellement à l'hypothénuse. Le *cosinus* est le côté adjacent à l'angle; le sinus, opposé

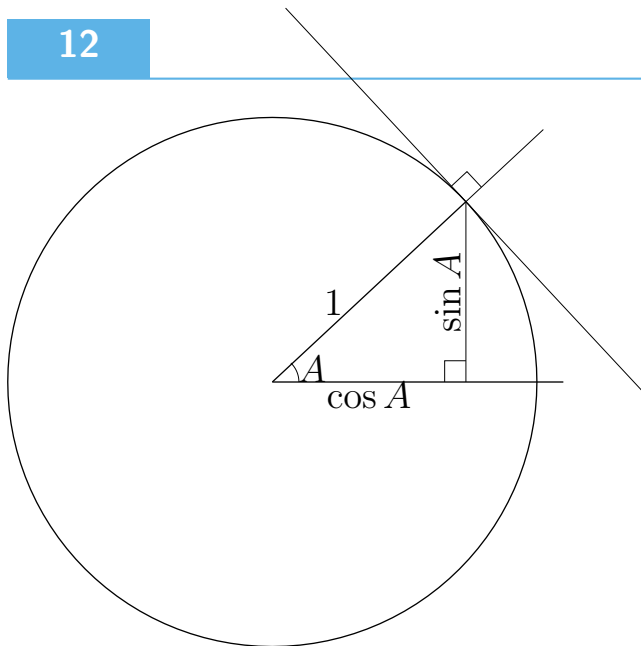


Figure 2: Angle  $A$  sur le cercle trigonométrique

à l'angle.

### 1.3 Relation de Pythagore

La somme des carrés des petits côtés d'un triangle rectangle est égale au carré de l'hypoténuse. Différentes démonstrations ont été égrainées au fil des siècles, chacun trouvera l'une ou l'autre plus facile. Une en est donnée Figure 3.

Sur le triangle trigonométrique, on en tire donc la relation clé

#### RELATION CLÉ 1 Pythagore

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

où la notation  $\sin^2 A \stackrel{\text{def}}{=} (\sin A)^2$ .

En se rappelant que la somme des angles d'un triangle (dans le plan)

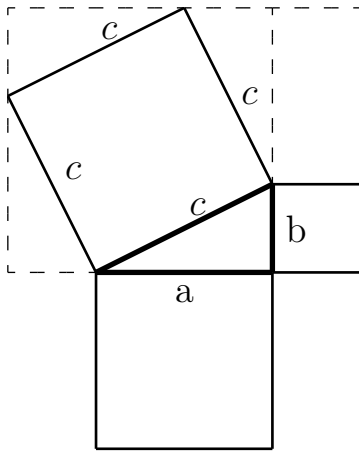


Figure 3: Théorème de pythagore: le carré formé de côté  $a + b$  contient à la fois le carré de côté  $c$  et l'équivalent de 4 triangles rectangles de petit côtés  $b$  et  $c$ . On a donc  $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$  ou encore  $a^2 + b^2 = c^2$ .

fait  $180^\circ$  et en coupant en deux un carré (le long de la diagonale) ou un triangle équilatéral (le long d'une médiatrice), on trouve les sinus et cosinus remarquables:

## RELATION CLÉ 2 Sinus et cosinus d'angles remarquables

$$\sin 0 = 0 \quad \cos 0 = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En observant le cercle trigonométrique on constate que le sinus est une fonction impaire, le cosinus une fonction paire.

$$\sin(-A) = -\sin A$$

$$\cos(-A) = \cos A$$

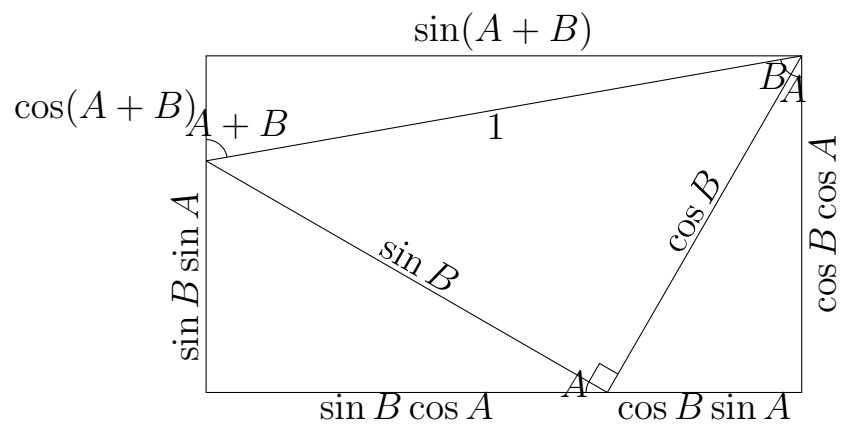


Figure 4: Démonstration des relations de sommes de sinus et cosinus.

Enfin, les relations des sommes de sinus peuvent, par exemple, s'obtenir par analyse du rectangle de la Figure 4

**RELATION CLÉ 3 Sinus et cosinus d'une somme**

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \quad (1)$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (2)$$

On rappelle par ailleurs les fonctions définies à partir des sinus et cosinus:

$$\operatorname{tg} A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin A}{\cos A} \qquad \operatorname{sec} A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\cos A} \qquad \operatorname{cosec} A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin A}$$

En jouant avec ces formules (addition, soustraction) et en définissant  $P = A + B$  et  $Q = A - B$  on retrouve les formules de Simpson:

**RELATION CLÉ 4 Simpson**

$$\sin P + \sin Q = 2 \sin \left( \frac{P + Q}{2} \right) \cos \left( \frac{P - Q}{2} \right)$$

$$\sin P - \sin Q = 2 \cos \left( \frac{P + Q}{2} \right) \sin \left( \frac{P - Q}{2} \right)$$

$$\cos P + \cos Q = 2 \cos \left( \frac{P + Q}{2} \right) \cos \left( \frac{P - Q}{2} \right)$$

$$\cos P - \cos Q = -2 \sin \left( \frac{P + Q}{2} \right) \sin \left( \frac{P - Q}{2} \right)$$

Sur base des sinus et cosinus d'une somme, on trouve immédiatement les relations pour le doublement d'un angle:

$$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A \quad (3)$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 \quad (4)$$

La dernière égalité étant obtenue avec Pythagore.

#### 1.4 Développements en série (en radians)

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \mathcal{O}(A^7)$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin A}{A} = 1$$

$$\cos A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{4!} + \mathcal{O}(A^6)$$

si  $A$  est un incrément infinitésimal (i.e., si  $A = d\varepsilon$ ), on a  $\sin d\varepsilon = d\varepsilon$  parce que  $\lim_{d\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin d\varepsilon}{d\varepsilon} = 1$ .

#### 1.5 Résolution d'un triangle

Nous sommes maintenant en mesure de “résoudre” un triangle scalène, c’est à dire déterminer la valeur des trois angles et trois côtés, sur base, soit

- ▷ d’un côté et deux angles;
- ▷ deux côtés et un angle

Les côtés et angles connus ne doivent pas nécessairement être adjacents. Pour ce faire, on peut se baser sur la construction suivante. Notez la

convention: les angles  $A, B, C$  sont opposés aux côtés  $a, b, c$ , et les côtés se succèdent dans le sens horloger.

De plus, dès qu'on connaît deux angles, on connaît le troisième puisque leur somme vaut  $\pi$  radians.

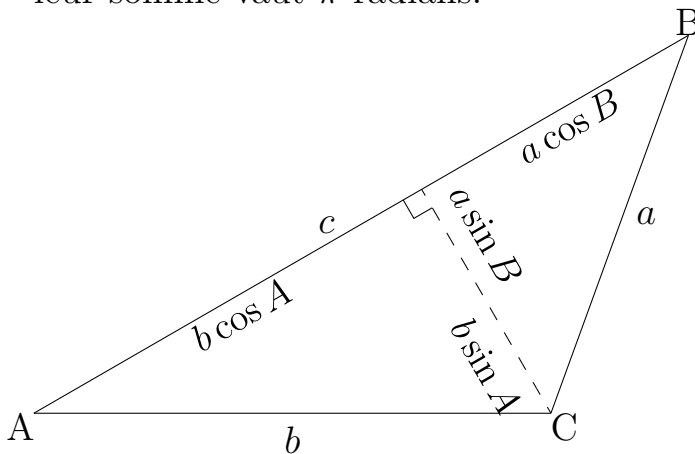


Figure 5:  
Relations permettant de résoudre un triangle scalène (quelconque).

La Figure 5 fournit les bases de la résolution. La relation de sinus se déduit de l'identité  $a \sin B = b \sin A$ . Par "rotations", c'est à dire en faisant tourner la construction de façon à ce que  $A$  et  $a$  prennent le rôle de  $B$  et  $b$ ,  $B$  et  $b$  prennent le rôle de  $C$  et  $c$ , et  $C$  et  $c$  prennent le rôle de  $A$  et  $a$ , on trouve les trois relations

### RELATION CLÉ 5 Rapports entre côtes et angles dans le plan

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

D'autre part, si l'on connaît  $A, b$  et  $c$ , on peut retrouver  $a$  en utilisant  $c = b \cos A + a \cos B$  (il suffit d'isoler  $a$ ).

De la même façon on peut procéder par rotation:

**RELATION CLÉ****6****Résolution du triangle dans la plan**

$$c = b \cos A + a \cos B$$

$$a = c \cos B + a \cos C$$

$$b = a \cos C + a \cos A$$

On peut ainsi produire de nombreuses relations, pas nécessairement commodes à retenir. Le mieux est d'utiliser la construction graphique de la Figure 5 et de réfléchir au cas par cas, en fonction des applications.

**1.6 Applications géodésiques**

Les exemples de résolution de triangles scalènes sont nombreux en géodésie.

Dans le plan horizontal, par exemple, détermination des distances  $AB$  et  $CB$  d'un point inaccessible  $B$ , sur base de l'observation des angles  $A$  et  $B$  avec le transect  $AC$ , dont la distance est connue.

Dans le plan vertical, détermination de l'altitude d'un point  $B$ , sur base de deux observations de sa distance zénithale observées en deux points d'égale altitude  $A$  et  $C$  (dans cet exemple, les distances zénithales sont les angles complémentaires à  $A$  et  $B$ ).

**EXERCICE****1 Promenade le long de la mer**

On se promène le long d'une digue, supposée rectiligne, la mer étant sur notre gauche. On aperçoit d'abord un phare à  $30^\circ$  sur la gauche. 500m plus loin, le phare apparaît maintenant à  $45^\circ$  sur la gauche. Quelle est la distance entre la digue et le phare ? Et quelle est la distance entre l'observateur et le phare, lors de la seconde observation ? On néglige, à cette échelle, la courbure de la Terre.

**EXERCICE****2 Du haut de la tour Eiffel**

La tour Eiffel fait 312 m de haut. En supposant la Terre parfaitement sphérique (6340 km) et en négligeant les effets de réfraction associés à l'atmosphère, à quel distance puis-je théoriquement voir des objets lorsque je suis à son sommet ?

**EXERCICE****3 Blue Marble**

En 1972, un des membres de l'équipage d'Apollo 17 a pris une photo de la Terre ("Blue Marble") depuis l'espace. La Terre y apparaît toute entière. Le photographe a utilisé un appareil Hasselblad avec un négatif de 70mm x 70 mm, et une lentille Zeiss de 80mm de focale. L'information importante est que cet appareil prend des photos carrées, avec un champ de vision sur l'horizontale (ou verticale)  $= 2 * \arctg(\frac{70mm}{2*80mm})$ . Quelle était, au minimum, la distance entre les astronautes et la surface de la Terre ?

## 2 Se positionner dans le plan sur base de repères

### 2.1 Coordonnées cartésiennes

Dans l'espace euclidien (où les droites sont droites...) on peut identifier la position d'un point sur base d'un repère avec une origine, et des vecteurs de base. On choisira d'ordinaire une base orthonormée: vecteurs perpendiculaires et de longueur unitaire <sup>1</sup>

Ainsi, dans le plan, on repère le point  $A$  par ses coordonnées  $(x_A, y_A)$ .

La distance entre  $A = (x_A, y_A)$  et  $B = (x_B, y_B)$  obéit au théorème de Pythagore:

#### RELATION CLÉ 7 Pythagore

$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

La distance est définie positive et vaut donc  $d_{AB} = \sqrt{d_{AB}^2}$ . Bien sûr, la mesure est symétrique ( $d_{AB} = d_{BA}$ ). Le point milieu du segment s'obtient par ailleurs comme la moyenne des coordonnées: milieu( $A, B$ ) =  $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ .

Le vecteur  $(y_A, -x_A)$  est perpendiculaire au vecteur  $(x_A, y_A)$ , car leur produit scalaire est nul.

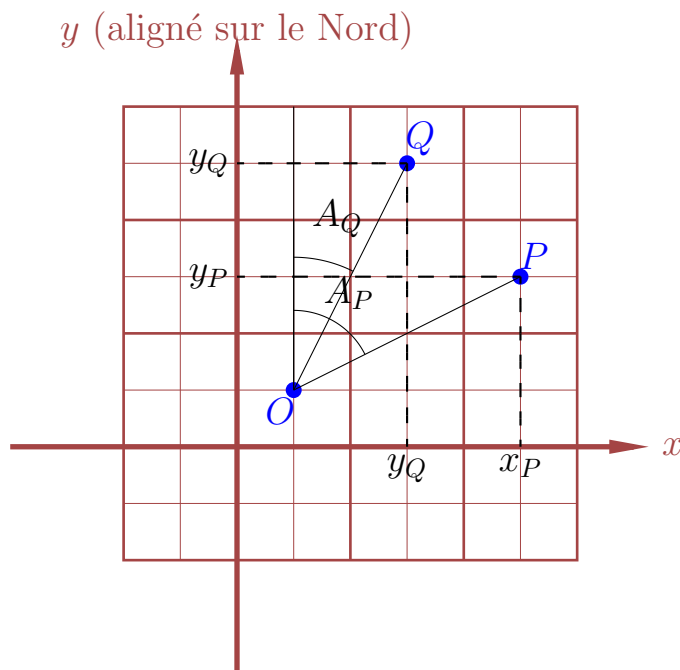
De façon générale, soit le vecteur  $(x_A, y_A)$ , on peut en construire un vecteur orthogonal à gauche  $(-y_A, x_A)$ , et un vecteur orthogonal à droite  $(y_A, -x_A)$ .

(schéma à ajouter)

<sup>1</sup>nous verrons dans la section 10.6.3 un système de coordonnées dit universel (en fait plutôt d'origine américaine) utilisé notamment sur nos cartes IGN.

## 2.2 Détermination des coordonnées d'un point sur base de deux observations d'azimut

Nous occupons une position inconnue au point  $O$ , de coordonnées  $(x_O, y_O)$ . On connaît la position de deux objets remarquables  $P$  et  $Q$ , qui occupent des position connue  $(x_P, y_P)$  et  $(x_Q, y_Q)$ . Depuis notre point d'observation  $O$ , les azimut de  $P$  et  $Q$ , mesurés par rapport au Nord, sont  $A_P$  et  $A_Q$ . On demande les coordonnées de  $O$ .



Supposons que nous orientons notre grille telle que l'axe  $y$  pointe vers le Nord.

Une droite d'azimut  $A$  par rapport au Nord, et qui passe par  $x_O, y_O$  obéit à la relation paramétrique  $x = x_O + \alpha \sin A$ ,  $y = y_O + \alpha \cos A$ .

En effet, un déplacement  $\alpha$  par rapport à  $(x_O, y_O)$  mène au point  $(\alpha \sin A, \alpha \cos A)$ , et observons qu'il fait un angle avec l'axe horizontal de  $\pi/2 - A$ , et un angle avec l'axe vertical de  $A$ .

Nous avons expliqué que nous connaissons leurs positions  $(x_P, y_P)$ ,  $(x_Q, y_Q)$ , mais nous ne connaissons pas la nôtre, dénotée  $(x_O, y_O)$ . Si on nomme  $d_{OP}$  la distance  $OP$ , et  $d_{OQ}$  la distance  $OQ$ ,

Donc,

$$(x_P, y_P) = (x_O, y_O) + d_{OP}(\sin A_P, \cos A_P), \quad (5)$$

$$(x_Q, y_Q) = (x_O, y_O) + d_{OQ}(\sin A_Q, \cos A_Q). \quad (6)$$

Ça nous fait quatre équations à quatre inconnues, mais il ne faut pas se laisser impressionner. En les soustrayant, on obtient deux équations:

$$(x_Q - x_P) = d_{OQ} \sin A_Q - d_{OP} \sin A_P$$

$$(y_Q - y_P) = d_{OQ} \cos A_Q - d_{OP} \cos A_P$$

On peut alors isoler  $d_{OQ}$  et  $d_{OP}$  assez facilement, par exemple par substitution. On peut également formuler le problème sous forme algébrique:

$$\begin{pmatrix} d_{OQ} \\ d_{OP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin A_Q & -\sin A_P \\ \cos A_Q & -\cos A_P \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (x_Q - x_P) \\ (y_Q - y_P) \end{pmatrix}.$$

La matrice à inverser a pour déterminant  $\sin(A_Q - A_P)$ . La solution est:

$$\begin{pmatrix} d_{OQ} \\ d_{OP} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(A_Q - A_P)} \begin{pmatrix} \cos A_Q & -\sin A_Q \\ \cos A_P & -\sin A_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}.$$

Si on préfère, on peut développer l'écriture matricielle:

### RELATION CLÉ 8 Distances à deux points de coordonnées et azimut connus

$$d_{OQ} = \frac{\cos A_Q(x_Q - x_P) - \sin A_Q(y_Q - y_P)}{\sin(A_Q - A_P)}$$

$$d_{OP} = \frac{\cos A_P(x_Q - x_P) - \sin A_P(y_Q - y_P)}{\sin(A_Q - A_P)}$$

Comme souvent, on peut essayer quelques cas types pour vérifier que la relation fait sens. Par exemple, si  $A_P = A_Q$ , les distances sont indéterminées (0/0).

Une fois connues les distances  $d_{OP}$  et  $d_{OQ}$ , on retrouve facilement les Coordonnées  $(x_O, y_O)$  en utilisant par exemple la relation (5).

## 2.3 Déterminer sa position par l'observation des angles entre trois points connus

### 2.3.1 Théorème du triangle inscrit

Si on n'a pas accès au Nord, deux observations ne suffisent pas. Il nous faudra mesurer les angles entre trois points distants. C'est le problème de Snellius-Pothenot, qui constitue la base de l'exercice de *triangulation*.

Pour cela, nous avons besoin d'un élément théorique préliminaire: le théorème du triangle inscrit.

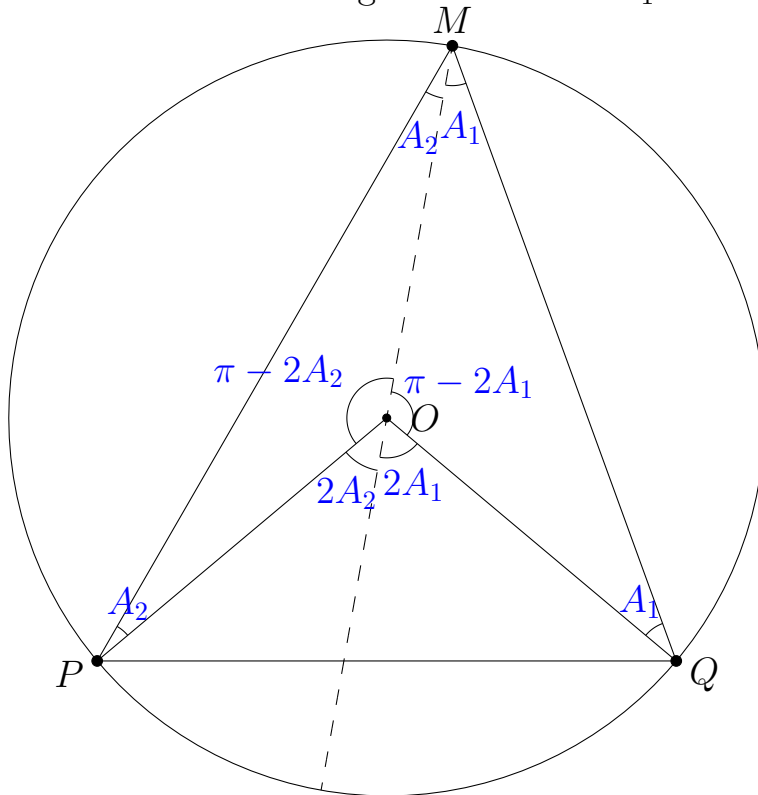
### THÉORÈME 1 Théorème du triangle inscrit

Soit deux points  $P$  et  $Q$  sur un cercle, formant un angle  $2A$  avec le centre  $O$ .

Tous les points sur le cercle, qui sont du côté du centre par rapport au segment  $PQ$ , forment un angle  $A$  avec le segment  $PQ$ .

Les points sur le cercle qui sont de l'autre côté forment un angle  $\pi - A$  avec  $PQ$ .

Pour le montrer, il faut découper le cercle en deux, selon l'axe  $MO$ . On forme ainsi les angles au centre  $2A_1$  et  $2A_2$ .



On retient par ailleurs que la somme des angles d'un triangle dans le

plan est de  $\pi$ .

L'analyse des triangles montre alors que le point  $M$  sur le cercle forme un angle  $A = A_1 + A_2$  s'il est du côté de  $O$  (on utilise le caractère isocèle du triangle  $OPM$ ).

Pour déterminer l'angle que fait  $M$  avec  $PQ$  lorsqu'il est de l'autre côté du centre (cas non illustré ici), il faut utiliser le fait qu'un triangle inscrit dont un des côtés est un diamètre, est rectangle.  $\square$

Pour être complet, il faudrait montrer que les *seuls* points formant un angle  $A$  sont sur le cercle. On peut le voir de façon qualitative: une fois sur  $M$ , tout déplacement vers le centre ou l'extérieur agrandit ou diminue  $A$ .

Le théorème du cercle inscrit nous permet de construire géométriquement un solution au problème de Snellius-Pothenot.

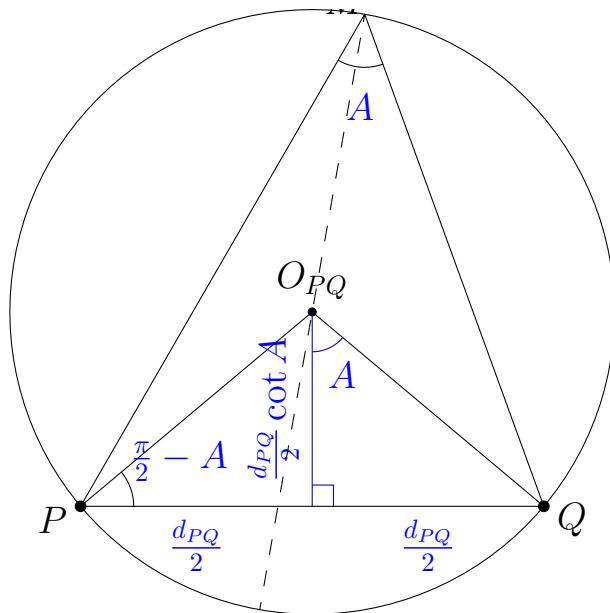


Figure 6: Un observateur  $A$  ne connaissant pas sa position observe  $P$  et  $Q$ . On retrouve le centre du cercle en utilisant la médiatrice de  $PQ$  et en traçant une droite partant de  $P$ .

Soit un observateur observant un angle  $A$  entre un point  $P$  et  $Q$ , dont on connaît les positions. Appelons  $d$  la longueur du segment  $PQ$  (Figure 6). On sait que l'observateur se trouve sur le même cercle que  $P$  et  $Q$ , de centre  $O_{PQ}$  positionné de telle façon que  $PO_{PQ}Q$  forme un angle  $2A$ . Pour trouver  $O_{PQ}$ , il suffit donc de chercher l'intersection entre

- ▷ la médiatrice de  $PQ$
- ▷ la droite partant de  $P$  et formant un angle  $\frac{\pi}{2} - A$  avec le segment  $PQ$ .

En raisonnant avec la trigonométrie, on trouve que si  $r$  est le rayon du cercle,  $r \sin A = \frac{1}{2}d_{PQ}$ . Nous avons donc tous les éléments pour déterminer le rayon  $r$  analytiquement.

On répète l'opération avec les points  $Q$  et un autre point de repère  $R$ , formant ainsi un autre cercle de centre  $O_{QR}$  (Figure 7). L'observateur se trouve sur une des deux intersections entre les deux cercles, l'autre intersection étant bien sûr  $Q$ .

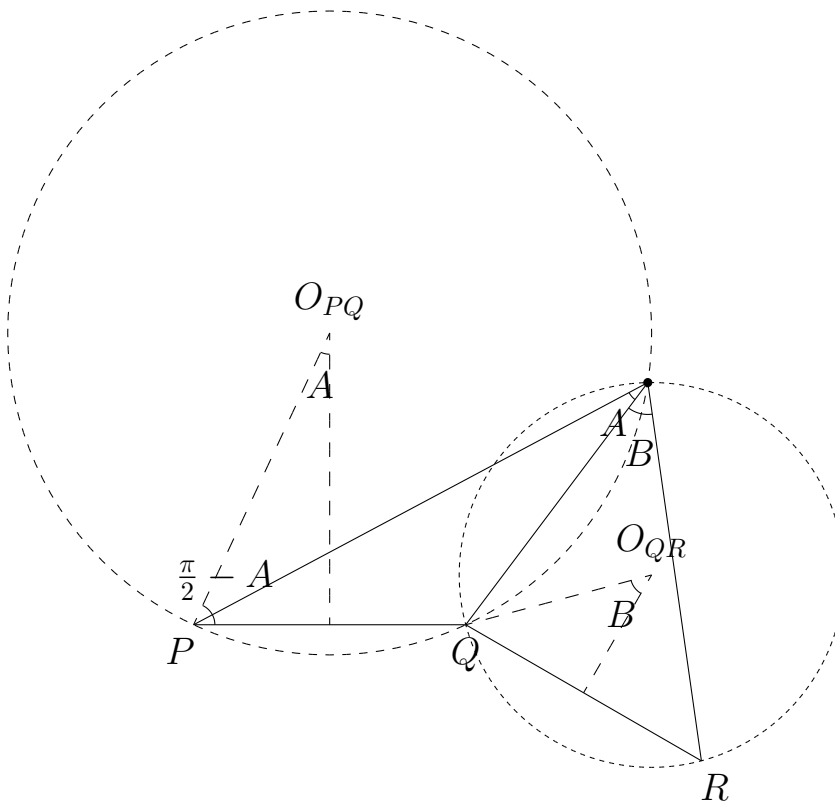


Figure 7: Si un observateur  $A$  observe  $P$ ,  $Q$ , et  $R$ , il peut tracer deux cercles selon la méthode de la Figure 6: un premier cercle utilisant  $P$  et  $Q$ , et un second utilisant  $Q$  et  $R$ . Il se trouve alors nécessairement sur l'intersection des deux cercles.

### 2.3.2 Détermination de la position des centres des cercles en coordonnées cartésiennes

Cherchons d'abord les coordonnées cartésiennes du centre du cercle passant par les points  $P$  et  $Q$ .

On détermine la direction du segment  $PQ$ , notée  $\gamma_{PQ}$ . Si  $\gamma_{PQ}$  est

mesuré par rapport au Nord, dans le sens horloger, on a:  $x_Q - x_P = d_{PQ} \sin \gamma_{PQ}$  et  $y_Q - y_P = d_{PQ} \cos \gamma_{PQ}$ .

On prend le point milieu du segment  $M = \frac{1}{2}(x_P + x_Q, y_P + y_Q)$ . On considère par ailleurs le vecteur normalisé  $\hat{Q}P = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)/d_{PQ}$ . On prend son orthogonal gauche:  $J(\hat{Q}P) = (-y_Q - y_P, x_Q + x_P)/d_{PQ}$ . Reste à voyager d'une distance  $\frac{d_{PQ}}{2} \cot A$  dans cette direction, soit le vecteur  $\frac{1}{2} \cot A (-y_Q - y_P, x_Q + x_P)$ . On aboutit à :

$$(x_{O_{PQ}}, y_{O_{PQ}}) = \frac{1}{2} [(x_P + x_Q, y_P + y_Q) + \cot A (y_Q - y_P, x_P - x_Q)]$$

On reproduit le raisonnement pour trouver le centre  $O_{QR}$ , sur base de l'angle  $B$  mesuré entre  $Q$  et  $R$  (dont la direction est  $\gamma_{QR}$ )

$$(x_{O_{QR}}, y_{O_{QR}}) = \frac{1}{2} [(x_Q + x_R, y_Q + y_R) + \cot A (y_R - y_Q, x_Q - x_R)]$$

### 2.3.3 Intersection de deux cercles

Reste une opération épineuse, trouver les coordonnées cartésiennes de l'intersection des deux cercles.

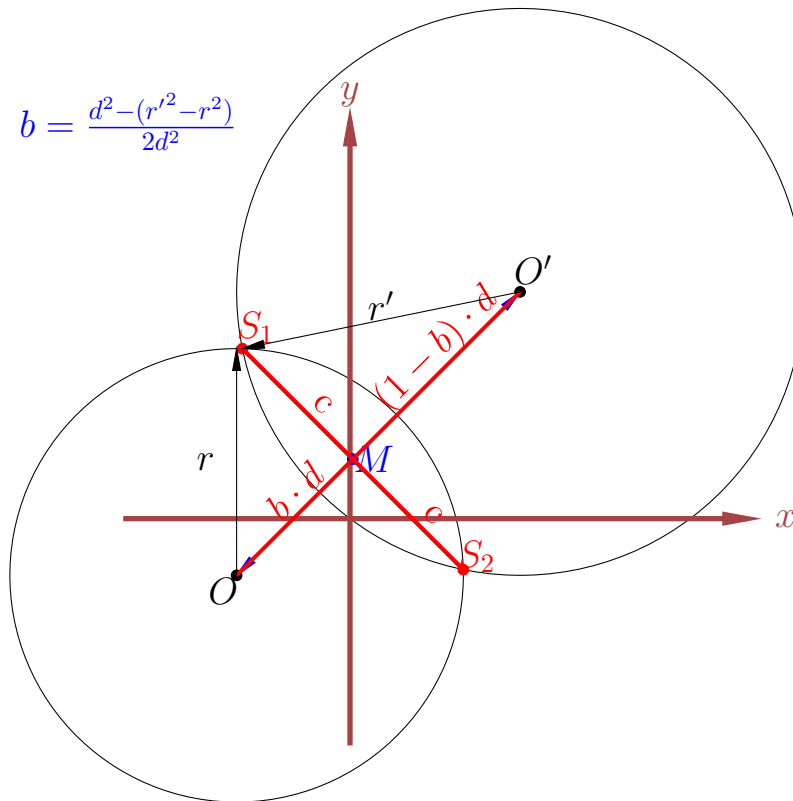
Nous allons résoudre ce problème de façon générale.

Un cercle est le lieu des points à égale distance ( $r$ ) du centre ( $O = (x_O, y_O)$ ) Considérons, en toute généralité, un autre cercle de centre  $O'$  de rayon  $r'$ .

Par un argument de symétrie (voir figure ci-dessous), on peut voir que les intersections  $S_1$  et  $S_2$  sont, chacune, sommets de deux triangles rectangles.

Prenons  $S_1$ : c'est un sommet du triangle  $OMS_1$  et du triangle  $O'MS_1$ , où  $M$  est sur la droite joignant  $O$  à  $O'$ . Appelons  $d$  la distance  $d(OO')$ ,

$bd$  la distance  $d(OM)$  et, par conséquent,  $(1-b)d$  la distance  $d(O'M)$ ,  
et appelons  $c$ , la distance  $d(MS_1)$  (qui sera la même que  $d(MS_2)$ ).



Par Pythagore, nous pouvons exprimer:

$$(bd)^2 + c^2 = r^2$$

$$[(1-b)d]^2 + c^2 = (r')^2$$

En soustrayant les équations, on trouve assez facilement que  $b = \frac{d^2 - \delta(r^2)}{2d^2}$  et, jouant sur Pythagore,

$$d^2 = \delta(x)^2 + \delta(y)^2$$

$$c^2 = r^2 - (bd)^2$$

où l'on a défini  $\delta(r^2) \stackrel{\text{def}}{=} r'^2 - r^2$ ,  $\delta x = x_{O'} - x_O$  et  $\delta y = y_{O'} - y_O$ .

Reste à trouver les coordonnées cartésiennes des deux sommets.

On cherche d'abord  $M = (x_0, y_0) + b(\delta x, \delta y)$ .

Ensuite, on trouve  $S_{1,2}$  en prenant les deux directions orthogonales, à gauche et à droite, de  $M$ :

$$S_{1,2} = M \pm \frac{c}{d}(\delta y, -\delta x) \tag{7}$$

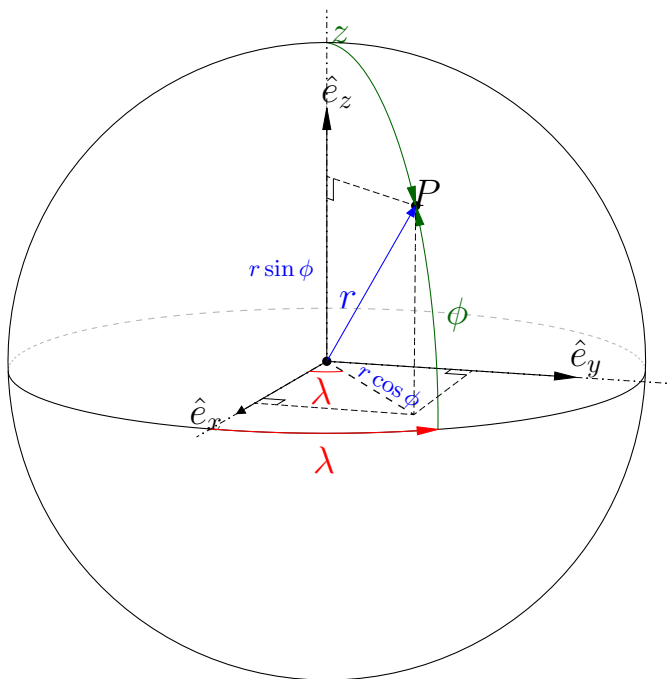
### 3 Définitions du géoïde et coordonnées géographiques

#### 3.1 Coordonnées sphériques

Dans l'espace nous avons besoin d'une base orthonormée de trois axes, que l'on dénotera généralement  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  et  $\hat{e}_z$ . Les coordonnées d'un point dans l'espace se liront donc  $P : (X, Y, Z) = X\hat{e}_x + Y\hat{e}_y + Z\hat{e}_z$ .

Cependant, il est souvent commode d'exprimer la position du point dans l'espace en coordonnées *sphériques*. On considère que le point  $P$  est sur une sphère centrée en l'origine, de rayon  $r$ .

Nous allons définir ici la *longitude*  $\lambda$  et *latitude*  $\phi$  du point, comme les angles au centre tels que représentés sur la figure.



Sur base de ces définitions, on obtient les relations suivantes:

### RELATION CLÉ 9 Coordonnées sphériques avec la latitude

$$X = r \cos \phi \cos \lambda \quad Y = r \cos \phi \sin \lambda \quad Z = r \sin \phi$$

Attention toutefois: pour certaines applications, on ne travaille non pas avec une latitude, mais avec une distance zénithale  $z$ , qui est mesurée à partir du pôle vertical. Bien qu'elle port le nom de "distance", il s'agit bien d'un angle, mesuré au centre. On a dès lors  $z + \phi = \frac{\pi}{2}$  et les relations deviennent:

$$X = r \sin z \cos \lambda \quad Y = r \sin z \sin \lambda \quad Z = r \cos z$$

## 3.2 Théorie du géopotential

Notre objectif ici est de déterminer un référentiel de coordonnées sur Terre, qui va nous permettre d'exprimer la position d'un objet. En préliminaire à ce travail, nous devons nous équiper d'une notion pour décrire et définir la forme de la Terre. Ceci nous oblige une digression vers la théorie du géopotential.

Par le simple fait d'être sur Terre, un objet est soumis à *deux forces*: la force gravitationnelle, qui est causée par l'attraction entre la masse et la Terre, et une force centrifuge qui est causée par le mouvement circulaire autour de l'axe de rotation.

En très bonne approximation, la force gravitationnelle pointe vers le centre de masse de la Terre, mais sa direction est modifiée par la présence de montagnes environnantes, et par des irrégularités dans la distribution de densité qui peuvent être ressenties localement. La force centrifuge est, elle, perpendiculaire à l'axe de rotation terrestre.

Certes, force centrifuge n'est pas une force fondamentale au sens des lois fondamentales de la physique, mais elle s'applique à tout corps dès qu'on désire exprimer les lois du mouvement dans un repère en rotation. Or c'est précisément ce que nous voulons faire: déterminer un repère attaché à la Terre, et qui tourne avec elle.

La résultante de ces deux forces dépend de la position de l'objet mais elle est toujours proportionnelle à sa masse. De plus elle ne dépend pas de sa vitesse. En termes de physique, on dit que la force dérive d'un champ potentiel, que l'on note ici  $V$ . La quantité  $V$  est un scalaire, qui dépend de la position dans l'espace. Ainsi, on écrit, pour une force s'appliquant sur une masse  $m$ :

$$\vec{F} = -m\nabla V.$$

L'opérateur  $\nabla$  est un opérateur différentiel qui s'applique au scalaire  $V$  et qui génère un vecteur, en l'occurrence la force.

On appelle *géopotential* le potentiel  $V$  associé aux forces gravitationnelle et centrifuges.

Avant même d'entrer dans les calculs, nous savons que, pour une vitesse angulaire donnée ( $\omega$ ), la force centrifuge augmente avec le carré de la distance de l'axe de rotation. Par conséquent, nous attendons une force centrifuge maximale à l'équateur, et nulle au pôle. Cet argument nous permet déjà d'entrevoir que la Terre doit être un peu aplatie.

Nous allons maintenant préciser cette idée.

Lorsqu'un fluide est en équilibre hydrostatique, toute sa surface se place sur une même valeur de potentiel. On s'attend donc à ce que le niveau des mers prenne la forme d'une surface d'égal géopotential, appelée surface *équipotentielle* ou encore *surface de niveau*.

La théorie permettant de décrire le potentiel gravitationnel ( $V_G$ )

dépasse le cadre de ce cours mais nous allons en esquisser les principes fondamentaux. Calculer le potentiel gravitationnel nécessite de connaître la distribution de masse à l'intérieur de la Terre. Plus précisément, la loi de la physique à appliquer s'exprime avec l'équation de Poisson, qui lie les dérivées secondes de  $V_G$  à la densité:  $\nabla^2 V_G = -4\pi G\rho$ , où  $G$  est la constante universelle de la gravitation. À l'extérieur de la terre,  $\rho = 0$  et  $\nabla^2 V_G = 0$ . Cette dernière équation s'appelle l'équation de Laplace.

Pour le dire en quelques mots, la *distribution* de la masse de la Terre est exprimée au moyen des termes d'inerties. Nous avons vu, au cours LPHY1101, la notion de moment d'inertie autour d'un axe. C'est très précisément cette définition qui s'applique pour définir les moments d'inertie autour des axes  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$ , et  $\hat{e}_z$ . Ils se nomment  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  et  $I_{33}$ . Si, par exemple, la Terre était parfaitement sphérique, ces trois quantités seraient identiques. Comme la Terre est un objet un peu plus compliqué, il faut généraliser l'idée et décrire le moment d'inertie comme un *tenseur*. En va notamment définir les quantités  $I_{12}$ ,  $I_{13}$  etc.

Les *moments d'inertie*  $I_{11}$ ,  $I_{12}$  etc. expriment la distribution de masse autour du centre. Plus précisément, ils s'obtiennent en intégrant les éléments de masse multipliés par les composantes de la position:

$$I_{ij} = \int_{\mathcal{M}} x_i x_j d\mathcal{M}$$

où  $d\mathcal{M}$  est un élément de masse. Les facteurs  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont les coordonnées de position qui sont ici représentés de façon synthétique, avec des indices ( $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ ,  $x_2 \stackrel{\text{def}}{=} y$  et  $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} z$ ). Comme nous l'avons dit, sur une sphère homogène,  $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ . De plus, tous les termes croisés  $I_{12}$  etc. sont nuls, par symétrie. Sur une sphère aplatie,  $I_{11}$  et  $I_{22}$  seront d'autant plus grands que la masse est distribuée loin de l'axe de rotation;  $I_{33}$  sera d'autant plus petit que la sphère est aplatie, et donc que la masse est concentrée près de l'équateur.

Les termes croisés  $I_{13}$  et  $I_{23}$  sont nuls si l'axe de rotation s'aligne parfaitement avec l'axe d'aplatissement de la Terre. En réalité l'alignement n'est pas parfait, mais suffisant pour négliger ces termes. On peut alors démontrer (travail de physique qui vous est épargné ici) que le potentiel obéit à la relation suivante, à l'ordre 2, en coordonnées sphériques:

$$V_{2,G}(r, \phi, \lambda) = - \left( \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3} \left( I_{33} - \frac{1}{2} (I_{11} + I_{22}) \right) \frac{1 - 3 \sin^2 \phi}{2} + \frac{3G}{4r^3} \left( (I_{22} - I_{11}) \cos(2\lambda) + I_{12} \sin(2\lambda) \right) \cos \phi \right)$$

Le premier terme,  $\frac{GM}{r}$ , est celui attendu pour une terre sphérique. Le second terme est un terme de correction. On voit qu'il est proportionnel à l'aplatissement terrestre. L'enjeu est de connaître son ordre de grandeur. Si on définit  $R_e$ , le rayon équatorial, on voit que, à l'équateur, le rapport entre le second terme et le premier terme est de l'ordre de

$$C_{20} = \frac{-1}{\mathcal{M}R_e^2} \left( I_{33} - \frac{1}{2} (I_{11} + I_{22}) \right)$$

Le signe  $-$  trouve son origine dans une convention qui permet de développer le potentiel sous forme d'harmoniques sphériques. Le facteur  $C_{20}$  est de l'ordre de  $-10^{-3}$ . Donc, le potentiel d'une Terre sphérique doit être corrigé de l'ordre d'un millième pour tenir compte de son aplatissement.

Les autres termes sont issus d'anomalies zonales, qui sont très faibles car la rotation de la terre tend à l'homogénéiser zonalement. Les corrections associées à ces termes sont de l'ordre de  $10^{-9}$ .

Les termes associés aux éléments  $I_{13}$  et  $I_{23}$  n'apparaissent pas ici. Ils sont encore plus faibles, et sont, comme on l'a dit, associés au non-alignement entre la figure terrestre et son axe de rotation.

En très bonne approximation, donc, le potentiel gravitationnel terrestre vaut

$$V_{2,G}(r, \phi) = -\frac{GM}{r} \left( 1 - \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 C_{20} \frac{1 - 3 \sin^2 \phi}{2} \right).$$

Le facteur  $-C_{20}$  est positif, et à bien y regarder, le géopotential à une distance  $R_e$  est *plus élevé* au pôle ( $(1 - 3 \sin^2 \phi = -2)$ ) qu'à l'équateur ( $1 - 3 \sin^2 \phi = 1$ ).

## EXERCICE

4

### Le géopotential au pôle

Tracez une Terre légèrement aplatie, et tracez schématiquement des courbes de géopotential autour de la Terre. Le géopotential augmente avec distance au centre de masse. Essayez de vous convaincre que le géopotential à une distance  $R_e$  du centre de masse de la Terre est plus élevé au pôle qu'à l'équateur.

Il faut maintenant tenir compte du potentiel centrifuge.  $V_C = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi$ ; le facteur  $r \cos \phi$  est la distance par rapport à l'axe de rotation, et il est élevé au carré.

On obtient une expression du *géopotential* en additionnant les deux termes. Avec les approximations que nous avons faites, et quelques calculs, on montre que la surface d'égal géopotential *prend effectivement l'allure d'un ellipsoïde* avec les relation suivantes.

Si on définit,  $R_e$  le rayon équatorial,  $R_p$  le rayon polaire, et  $f$  l'aplatissement relatif tel que  $f = (R_e - R_p)/R_e$ , on peut montrer que l'on peut garder la même forme pour  $V_2$  mais qu'il faut ajouter

des termes pour tenir compte de l'effet centrifuge:

$$V_2 = V_{2,C} + V_{2,G} = +\frac{\omega^2 r^2}{2}(1 - \sin^2 \phi) + \frac{GM}{r} \left(1 - \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 C_{20} \frac{1 - 3 \sin^2 \phi}{2}\right).$$

Si on suppose une forme ellipsoïdale pour la surface équipotentielle, avec un facteur de forme  $f$ , qu'on peut écrire  $r_s = R(1 - f \sin^2 \phi)$  où  $R$  est un rayon moyen, alors on peut trouver une relation entre  $C_{20}$  et le facteur de forme en imposant que la valeur de potentiel à la surface de l'ellipsoïde de référence soit la même à l'équateur et au pôle. Après calcul cela donne:

$$-C_{20} = \frac{2}{3}f(1 - \frac{1}{2}f) - \frac{1}{3}m(1 - \frac{3}{2}m - \frac{2}{7}f) + \mathcal{O}(f^3)$$

Le facteur  $m$  est le rapport entre la force centrifuge et la force gravitationnelle à l'équateur, qui est de l'ordre de  $3 \times 10^{-3}$ . Au premier ordre, on trouve même:

$$-C_{20} = \frac{1}{3}(2f - m) + \mathcal{O}(f^2) + \mathcal{O}(mf) + \mathcal{O}(m^2),$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme  $f \simeq \frac{1}{2}(-3C_{20} + m)$ , avec  $-3C_{20} \simeq m \simeq f \simeq 0.003$ .

L'intérêt de cette formule est de montrer que l'aplatissement de la surface équipotentielle est pour égales parties expliquée par la distribution de masse sur tout le volume de la planète (le terme  $C_{20}$ , et par sa rotation ( $m$ )).

C'est en tenant compte les mesures de *rotation de la terre*, de champ gravitationnel, et d'aplatissement terrestre qu'on aboutit à un modèle

d'ellipsoïde standard, qui doit décrire une surface equipotentielle la plus proche possible des observations du niveau des mers. Cette procédure, qui relève d'un compromis pour accorder toutes les observations avec les approximations qui sous-tendent cette théorie, permet d'aboutir à un *modèle standard*.

Plus précisément, l'ellipsoïde de référence WGS84 sert de surface de référence pour définir les coordonnées dans le système GPS. Dans ce cas:

$$R_e = 6378137m$$

$$f = 1/298.257223563$$

$$R_p = 6356752 m$$

$$GM = 3986004.418 \times 10^8 m^3/s^2$$

$$\omega = 72.92115 \times 10^{-6} \text{rad/s}$$

Cet ellipsoïde de référence est un élément d'un système plus complet comprenant l'ellipsoïde, un système de coordonnées (voir section suivante) et le positionnement du repère sur base de points de référence sur Terre (le "datum") qui, ensemble, forment un système *système géodésique mondial*.

Depuis sa publication en 1987, WGS84 a reçu plusieurs mises à jour, la dernière en date datant de janvier 2024. Le Repère International de Référence Terrestre utilise également un ellipsoïde très proche en forme et position du WGS84 (quelque centimètres de différence) et ce dernier est utilisé pour le système Galiléo.

## EXERCICE

## 5 Se sent-on plus léger?

Estimez le rapport entre votre poids et la force centrifuge à la surface de l'équateur. C'est votre poids apparent. Comparez-le à votre poids apparent au pôle Nord. Comparez ces trois quantités (le poids à l'équateur, le poids apparent à l'équateur, et le poids au Pôle. Qu'en concluez-vous ?

## 3.3 Latitude géodétique et géocentrique

Si la Terre était une sphère, nous aurions simplement pu définir la latitude  $\phi$  et longitude  $\lambda$  en utilisant les coordonnées sphériques telles que nous les avons vues en début de cette section. On aurait placé l'axe  $e_z$  dans l'axe de rotation.

On définit:

- ▷ les *parallèles*, les cercles d'égales latitudes;
- ▷ les *méridiens*, les cercles d'égales longitudes.

Restait à fixer  $e_x$ , perpendiculaire à  $e_z$ . Cela nécessite une convention, qui consiste à peu de choses près à faire passer le méridien de longitude zero par l'observatoire de Greenwich. Nous y reviendrons.

Comme nous venons de le voir, ce référentiel sphérique ne décrit que trop approximativement la surface terrestre.

Le modèle standard sur lequel nous allons définir latitude et longitude et l'ellipsoïde de référence, par exemple telle que définie par le système WGS84.

A priori nous aurions pu conserver nos coordonnées sphériques. Pour la longitude cela ne pose pas vraiment de problème car l'ellipsoïde

possède une symétrie de révolution autour de l'axe polaire.

En revanche, pour la latitude différents choix se posent. On peut en effet définir la latitude comme l'angle au centre. Cela devient la latitude *géocentrique*, que nous noterons désormais avec une lettre "prime",  $\varphi'$ .

Cependant, il est souvent plus commode de mesurer la latitude comme l'angle fait entre la verticale du lieu et le plan de l'équateur. En effet, dans la mesure où l'ellipsoïde de référence est une bonne approximation de la surface équipotentielle, la verticale du lieu sera, en très bonne approximation, perpendiculaire à cette surface. Comme on le voit ci-dessous, la perpendiculaire à l'ellipsoïde est excentrée. Elle n'atteint pas le centre de la Terre.

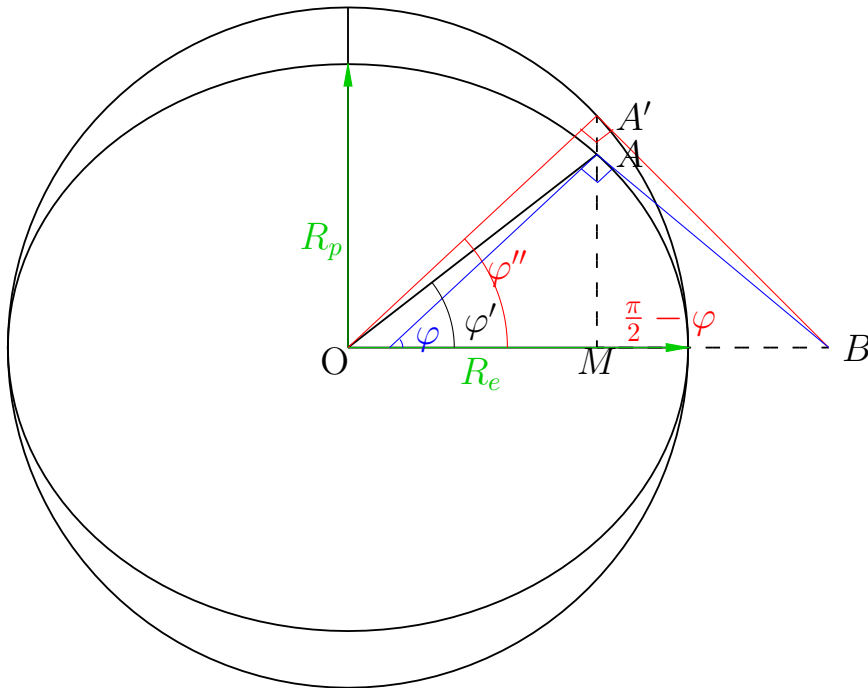
Cela nous amène donc à définir une latitude géodétique  $\varphi$ .

## THÉORÈME 2 Relations entre latitudes

La latitude géodétique  $\varphi$  et latitude géocentrique  $\varphi'$  sont liées par la relation suivante:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi (1 - f)^2$$

En effet, en se rapportant à la figure suivante, on trouve:



$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{MA}{OM}$$

$$\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{MA'}{OM} = \frac{MB}{MA'}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MA}{MB}$$

La quantité  $\varphi''$  porte le nom de *latitude paramétrique*. Par ailleurs, de par la construction de l'ellipse,  $\frac{MA}{MA'} = \frac{R_p}{R_e} = (1 - f)$ . On réécrit donc:

$$\operatorname{tg} \varphi'' = (1 - f)^{-1} \frac{MA}{OM} = \frac{MB}{MA} (1 - f)$$

et finalement:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi'' &= (1 - f)^{-1} \operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi(1 - f) \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg} \varphi(1 - f)^2\end{aligned}$$

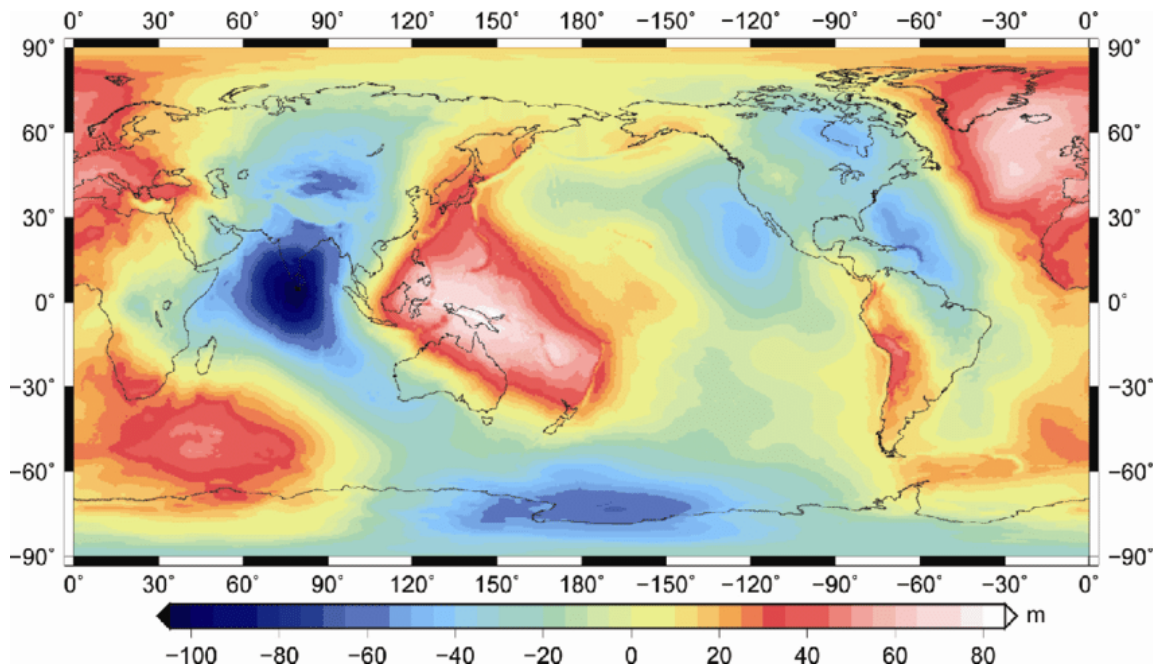
Ainsi, nous savons maintenant qu'un système de coordonnées associé à un modèle standard (ellipsoïde de référence) définit:

- ▷ les paramètres de l'ellipsoïde et sa rotation
- ▷ son positionnement dans l'espace
- ▷ un méridien de référence, que l'on appelle "méridien premier". Le système WGS84 utilise le méridien de référence de l'IERS, que est à 102,5 m à l'est du point de référence historique de Greenwich.

### 3.4 Géoïde

Nous devons maintenant admettre que l'ellipsoïde de référence n'est qu'une approximation de la surface équipotentielle. Cette dernière est en effet déformée par la topographie (chaînes montagneuses), les inhomogénéités de la croûte terrestre et de l'intérieur.

L'étude de ces facteurs donne lieu à des modèles de géoïde, dont l'altitude par rapport à l'ellipsoïde de référence varie d'environ 100 m en fonction des endroits. Ci-dessous, le modèle EGM 2008: On estime sa précision de l'ordre de 5 cm sur les océans, et 50 cm sur les continents.



L'écart entre le géoïde et l'ellipsoïde de référence implique que la verticale du lieu que l'on peut mesurer avec un fil à plomb n'est pas parfaitement alignée avec la perpendiculaire à l'ellipsoïde de référence. Cet écart porte le nom de *déflexion de la verticale*, dont la valeur est de l'ordre de  $10''$  d'arc dans les plaines, et 20 à  $50''$  dans les régions montagneuses.

Nous parlons ici d'angles très petits. Pour se donner une idée, les étoiles Alcor et Mizar, de la Grande Ourse, que l'on parvient à séparer avec une assez bonne vue, sont séparées de  $12'$  d'arc, soit 20 fois plus que les angles dont nous parlons ici. Les deux étoiles du système double d'Albiro qu'on peut distinguer avec une bonne paire de jumelles et un peu d'expérience sont séparées d'environ  $35''$  d'arc.

La géodésie géophysique s'intéresse à ces lents mouvements du géoïde lié entre autres effets à la lente déformation de la croûte terrestre (tectonique, effets isostatiques).

## EXERCICE

## 6 L'attrait de la montagne

Vous êtes en Inde. La chaîne de l'Himalaya est à au Nord. Nous allons faire l'hypothèse que l'Himalaya est un gros parallélépipède rectangle d'une base de  $600\,000\text{ km}^2$  et d'une hauteur moyenne de  $4\,000\text{ m}$ , avec une densité moyenne de  $2.9$  ( $2900\text{ kg/m}^3$ ). Si vous vous trouvez à  $1000\text{ km}$  de la chaîne, quelle est la force d'attraction qu'elle exerce sur vous ? Pour simplifier, nous la considérons horizontale (pour rappel,  $F_g = -GMm/r^2$ ,  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\text{ N m}^2\text{ kg}^{-2}$ ). Comparez-la avec votre poids. Quel est l'ordre de grandeur de l'inclinaison du géoïde causée par la présence l'Himalaya ? (solution:  $10''$  d'arc)

## 3.5 En savoir plus:

<https://www.e-education.psu.edu/geog862/book/export/html/1669>

## 4 Relations de trigonométrie sphérique

Considérons une sphère de rayon unitaire et de centre  $O$ . Nous appellerons *grand cercle* tout cercle de rayon unitaire passant par  $O$ .

Soit,  $A, B, C$  trois points de la sphère. Le TRIANGLE SPHÉRIQUE est la surface définie sur la sphère par les arcs de grands cercles  $a, b, c$ .

On dit donc que  $a, b$  et  $c$  sont les **côtés** du triangle, et  $A, B$  et  $C$  en sont les **sommets**.

Par ailleurs, des angles associés à ces sommets se définissent de la façon suivante. **L'angle  $C$** , par exemple, est l'angle du dièdre formé par les plans  $Oa$  et  $Ob$ . Nous allons montrer qu'il existe des relations liant ces différents angles. Ces relations sont les *relations de trigonométrie sphérique*.

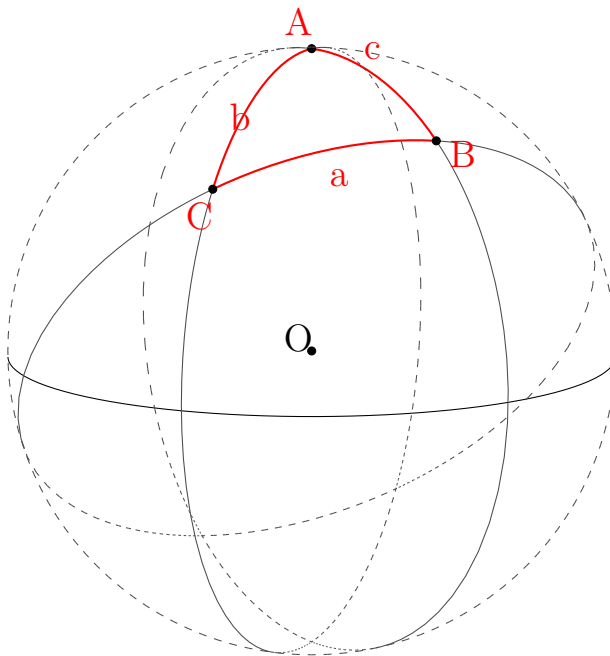


Figure 8: Le triangle sphérique  $ABC$  est constitué de trois sommets et côtés notés  $a, b$  et  $c$ , ces derniers étant des arcs de grand cercle.

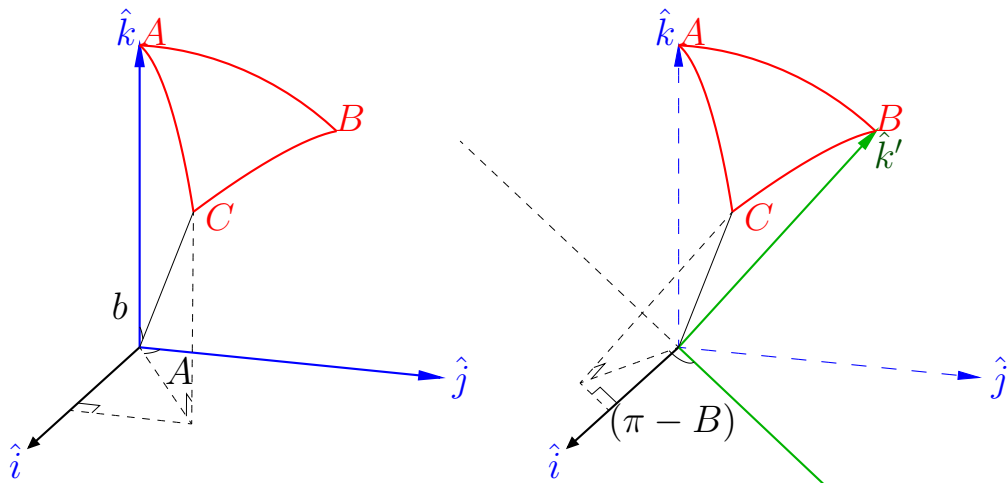


Figure 9: Triangle sphérique  $ABC$ , avec  $C$  projeté dans le repère  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  (à gauche) et  $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$  (à droite).

Soit le triangle  $ABC$ . Alignons un repère orthonormal  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  sur  $A$ , telles que les coordonnées  $OA = \hat{k}$  et que le côté  $c$  soit dans le plan  $\{\hat{j}, \hat{k}\}$ .

Les coordonnées du point  $C$  sont donc:

$$\begin{aligned} x &= \sin b \sin A \\ y &= \sin b \cos A \\ z &= \cos b \end{aligned} \tag{8}$$

de telle sorte que

$$\hat{OC} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Reprenons le même triangle, mais cette fois avec un repère  $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$  aligné sur  $B$ , toujours tel que  $c$  soit compris dans le plan  $\{\hat{j}', \hat{k}'\}$ .

On trouve par un raisonnement analogue que les coordonnées  $x', y', z'$

de  $C$  sont égales à :

$$\begin{aligned}x' &= \sin a \sin(\pi - B) = \sin a \sin B \\y' &= \sin a \cos(\pi - B) = -\sin a \cos B \\z' &= \cos a\end{aligned}\tag{9}$$

de telle façon que

$$\hat{C} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$$

Par ailleurs, remarquons que

$$\begin{aligned}\hat{i}' &= \hat{i} \\ \hat{j}' &= \hat{j} \cos c - \hat{k} \sin c \\ \hat{k}' &= \hat{j} \sin c + \hat{k} \cos c.\end{aligned}$$

notons que

$$\begin{aligned}\hat{O}C &= x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \\ &= x'\hat{i} + y' \cdot \{\hat{j} \cos c - \hat{k} \sin c\} + z' \sin c \hat{j} + z' \cos c \hat{k} \\ &= \underbrace{x'}_x \hat{i} + \underbrace{\{y' \cos c + z' \sin c\}}_y \hat{j} + \underbrace{\{z' \cos c - y' \sin c\}}_z \hat{k}\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}x &= x' \\ y &= y' \cos c + z' \sin c \\ z &= z' \cos c - y' \sin c\end{aligned}$$

En remplaçant  $x, y, z, x', y', z'$  par leurs valeurs dans (8) et (9) on trouve:

$$\begin{aligned}\sin b \sin A &= \sin a \sin B \\ \sin b \cos A &= -\sin a \cos c \cos B + \cos a \sin c \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B\end{aligned}$$

À partir de ces relations il est possible d'en créer bien d'autres. Trois premiers groupes de relations s'obtiennent en observant que:

- ▷ Si le triangle de sommets  $(A, B, C)$  et de côtés  $(a, b, c)$  est un triangle sphérique, alors le triangle de sommets  $(B, C, A)$  et de côtés  $(b, c, a)$  en est un également.

et

- ▷ Si le triangle de sommets  $(A, B, C)$  et de côtés  $(a, b, c)$  est un triangle sphérique, alors le triangle de sommets  $(B, A, C)$  et de côtés  $(b, a, c)$  en est un également.

Sur base des relations précédentes on obtient alors trois systèmes de relations fondamentales:

$$\begin{aligned}I : \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C\end{aligned} \Leftrightarrow \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\begin{aligned}
 \sin a \cos B &= -\sin b \cos c \cos A + \cos b \sin c \\
 \sin a \cos C &= -\sin c \cos b \cos A + \cos c \sin b \\
 \text{II : } \sin b \cos C &= -\sin c \cos a \cos B + \cos c \sin a \\
 \sin b \cos A &= -\sin a \cos c \cos B + \cos a \sin c \\
 \sin c \cos A &= -\sin a \cos b \cos C + \cos a \sin b \\
 \sin c \cos B &= -\sin c \cos a \cos C + \cos b \sin a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\
 \text{III : } \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\
 \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C
 \end{aligned}$$

Il est possible de créer un quatrième système sur base des considérations suivantes.

À chaque côté (disons:  $a$ , défini par  $BC$ ), il est possible de faire correspondre un *pôle*  $A^*$ . Le pôle est le point de percée de l'axe (passant par le centre de la sphère) orthogonal au grand cercle décrit par  $a$ . Parmi les deux pôles possibles celui qui est retenu est choisi par application de la règle de la main droite, en allant de  $B$  vers  $C$ .

### DEFINITION 2 Triangle conjugué

Soit un triangle de côtés  $a, b, c$ , et de sommets  $A, B, C$ , et soit  $A^*$  le pôle de  $a$ ,  $B^*$  le pôle de  $b$  et  $C^*$  le pôle de  $c$ .  
Le triangle défini par les sommets  $A^*, B^*, C^*$  est appelé le triangle conjugué de  $ABC$ .

**THÉORÈME 3 Relation des triangles conjugués**

Soit les côtés  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$  du triangle  $A^*B^*C^*$ , conjugué de  $ABC$ . On a alors les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} a = \pi - A^* & A = \pi - a^* \\ b = \pi - B^* & \text{et } B = \pi - b^* \\ c = \pi - C^* & C = \pi - c^* \end{array}$$

Ainsi, si on applique le bloc de relations *III* au triangle  $A^*B^*C^*$  et que l'on réexprime ensuite en fonction des côtes et sommets du triangle  $ABC$  en utilisant les relations ci-dessus, on obtient un quatrième groupe de relations:

$$\begin{array}{l} \cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C \\ IV : \cos B = \sin C \sin A \cos b - \cos C \cos A \\ \cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B \end{array}$$

Les groupes *I* et *III* sont les plus utiles. En effet on peut montrer que *II* se déduit algébriquement de *I* et *III*. Par ailleurs, retenir *I* est trivial, et comme *IV* se déduit facilement de *III*, le seul réel effort de mémorisation concerne le groupe *III*.

## 5 Orthodromie et loxodromie sur la sphère

### 5.1 Orthodromie

Assimilons le globe terrestre à une sphère. Soit  $A$  et  $B$ , deux points à la surface de cette sphère de coordonnées géographiques

$A : (\varphi_A, \lambda_A)$  et  $B(\varphi_B, \lambda_B)$ .

#### DEFINITION 3 Orthodromie

**L'orthodromie** entre  $A$  et  $B$  est la trajectoire à la surface de la sphère qui joint  $A$  à  $B$  par le chemin **le plus court**.

On peut se convaincre (mais on peut également démontrer mathématiquement...) qu'il s'agit de l'arc de grand cercle, de centre  $O$ , passant par  $A$  et  $B$ . Toute autre trajectoire serait plus longue.

La longueur de l'orthodromie s'obtient par résolution du triangle sphérique défini par les points  $A, B$  et  $C =$  pôle Nord, et dont les côtés  $b = \frac{\pi}{2} - \varphi_A$  et  $a = \frac{\pi}{2} - \varphi_B$  sont connus, de même que l'angle  $C = \delta\lambda \equiv \lambda_B - \lambda_A$ .

La longueur de l'orthodromie vaudra  $R \cdot c$ , où  $R$  est le rayon terrestre. On applique la relation (III.3) pour trouver:

$$\cos c = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \delta\lambda. \quad (10)$$

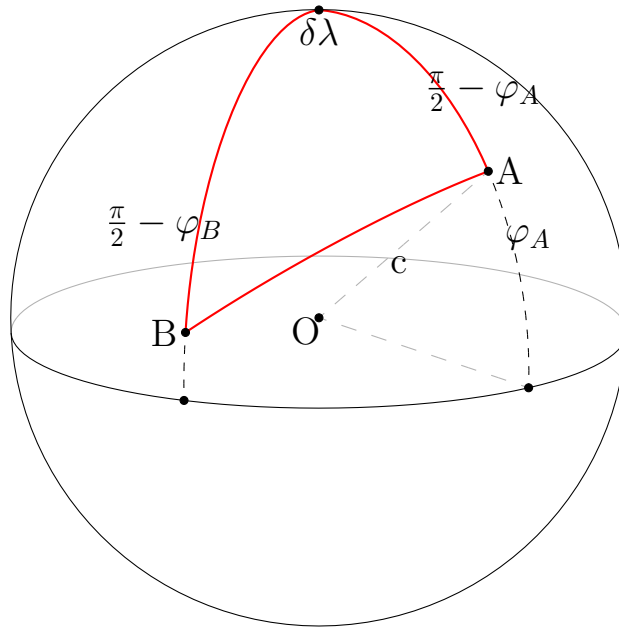


Figure 10: L'orthodromie est le côté  $c$  joignant  $A$  à  $B$

### EXERCICE

7

### Orthodromie de cas simples

1. Que vaut l'orthodromie de deux points alignés sur un même méridien? Montrez que  $c = |\varphi_A - \varphi_B|$ .
2. L'azimut à suivre par un marin, compté à partir du Nord, suivant l'orthodromie vaut:  $2\pi - A$  au départ, et  $B$  à l'arrivée. Déterminez  $A$  et  $B$  en utilisant les relations I.

## 5.2 Loxodromie

## DEFINITION 4 Loxodromie

La **loxodromie** entre deux points est la trajectoire à la surface de la sphère suivie en **maintenant un angle constant avec le méridien local** (trajectoire à azimut constant).

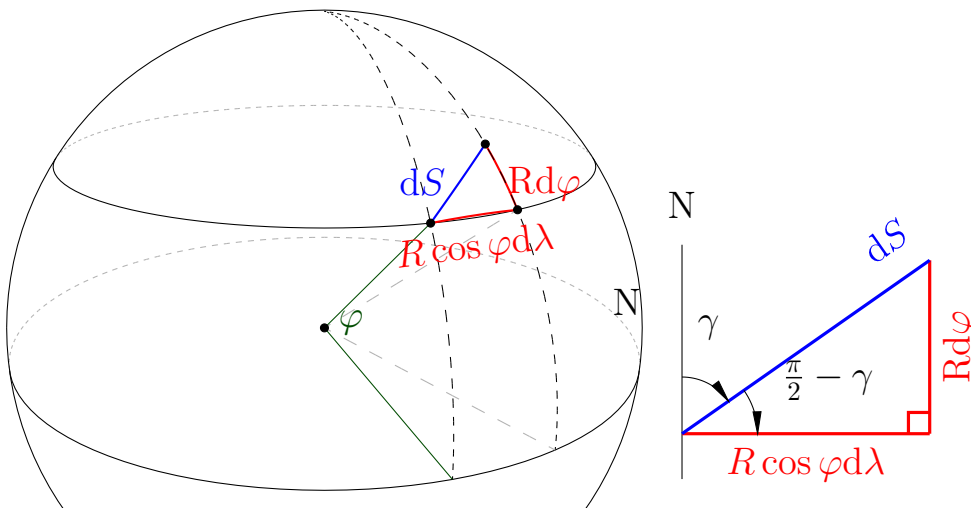


Figure 11: Élément de trajectoire  $dS$  d'azimut  $\gamma$  : représentation sur la sphère et dans le plan

Pour calculer la distance et l'azimut de cette trajectoire, il faut d'abord observer que l'élément de distance  $dS$  parcourue à la surface de la sphère <sup>2</sup> lors d'un incrément de longitude  $d\lambda$  et de latitude  $d\varphi$  vaut:

$$dS^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2) \quad (11)$$

<sup>2</sup>Le traitement sur l'ellipsoïde est donnée en Annexe B

Par ailleurs, si  $\gamma$  est l'azimut compté à partir du Nord,

$$d\lambda = \operatorname{tg} \gamma \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \quad (12)$$

$$dS = R \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} d\varphi = \frac{R}{\cos \gamma} d\varphi \quad (13)$$

$$\int (12) \Rightarrow \delta\lambda = \operatorname{tg} \gamma \cdot \left[ \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right]_A^B \quad (14)$$

$$\int (13) \Rightarrow \delta S = \frac{R}{\cos \gamma} \delta\varphi \quad (15)$$

Si les deux points sont sur le même parallèle ( $\phi_A = \phi_B$ ), la trajectoire à cap constant se fait le long de ce parallèle (vers l'Est,  $\gamma = \pi/2$ , ou vers l'Ouest,  $\gamma = -\pi/2$ ). La formule (12) diverge mais on peut néanmoins calculer la distance parcourue le long du parallèle. Le parallèle est un cercle de rayon  $R \cos \phi$  et l'angle est  $\delta\lambda$ , de telle sorte que  $\delta S = R \cos \phi \delta\lambda$ .

Si les deux points sont fort proches en latitude mais pas exactement sur le même parallèle, alors les équations (12) et (13) sont en principe correctes mais leur utilisation peut engendrer des erreurs numériques car l'équation (14) va se traduire par la multiplication d'un grand nombre ( $\operatorname{tg} \gamma$ ) par un petit nombre.

Pour des très petites différences de latitude (moins que 1 degrés), on peut réaliser une estimation assez précise sous la forme

$$\delta s = R \sqrt{(\phi_m \cos(\delta\lambda))^2 + (\delta\phi)^2}, \quad (16)$$

où  $\phi_m$  est la latitude moyenne  $(\phi_A + \phi_B)/2$ .

Avec un ordinateur (nombres à virgule flottante encodés en 64 bits) la formule complète donne de bons résultats pour  $\delta\phi > 10^{-8}$  et la formule approximative n'est donc nécessaire que dans des cas très proches de l'alignement sur un même méridien.

### DEFINITION 5 Latitude isométrique

L'intégrale  $\int_0^\phi \frac{1}{\cos\phi} d\phi = \ln(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}))$  porte le nom de *latitude isométrique* ou encore *latitude de Mercator*. On la dénote par la lettre grecque  $\psi$ .

### EXERCICE 8 Propriété de la latitude isométrique

Démontrez que la latitude isométrique est une fonction impaire de la latitude, i. e.,  $\phi(-\psi) = -\phi(\psi)$ . Démontrez aussi que, près de l'équateur,  $\phi(\psi) \simeq \psi$ .

### EXERCICE 9 Transatlantique

Déterminer la loxodromie et l'orthodromie entre Paris et New York, avec Paris :  $48^\circ 48'N$  et  $2^\circ 20'E$  ; New York :  $43^\circ 03'N$   $77^\circ 36'W$

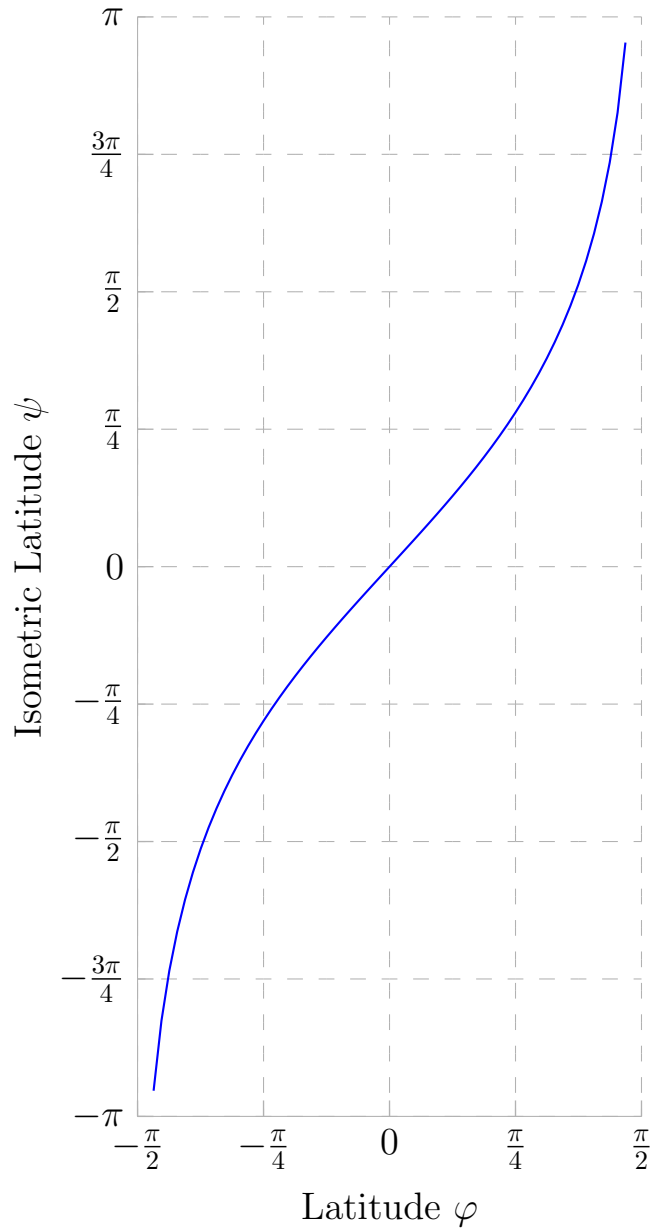


Figure 12: Latitude isométrique ( $\psi$ ), également appelée latitude de Mercator, en fonction de la latitude, dans l'hypothèse d'une Terre sphérique.

## 6 Trilatération par satellite

### 6.1 Le GNSS

Il existe différents types de systèmes de positionnement par satellite, rassemblés sous le vocable générique GNSS, pour *Global Navigation Satellite System*. Les trois systèmes les plus connus sont le système GPS (US Space Force, lancé en 1978), Galileo (*European Space Agency*, lancé en 2011), et GLONASS (*Roscosmos*, Union Soviétique et Russie, lancé en 1982).

Au delà des différences techniques d'implémentation, ces trois systèmes reposent sur un même principe de géolocalisation. Des satellites sont positionnés en orbite à typiquement 20 km d'altitude, et disposés de façon à ce que 4 satellites soient en permanence visibles de tout point de la Terre. Les satellites envoient des informations relatives à leur position et l'heure (temps) d'émission, ce dernier avec une précision de l'ordre de 30 nanosecondes. Un *récepteur* compare les temps d'émission des différents émetteurs. Connaissant la vitesse de la lumière dans le vide, le logiciel logé dans le récepteur permet d'inférer les distances relatives des différents émetteurs et, connaissant leur position, en déduit sa propre position.

Avant de s'appeler GPS, le système de positionnement satellite américain s'appelait NAVSTAR. Le premier récepteur à usage grand public a été commercialisé par la firme Texas Instrument. Le 4100 NAVSTAR Navigator était relativement compact (37 cm × 45 cm × 21 cm) mais pesait tout de même 24kg. Aujourd'hui, une montre de sport peut peser seulement 29 g et, en combinant les signaux GPS et Galiléo, vous localiser à 10m, c'est à dire la distance parcourue par la lumière en environ 0.03 millièmes de seconde (30 nanosecondes).

Nous allons tenter de comprendre les principes de base qui sous-tendent

cette technologie.

## 6.2 Trilatération

Les techniques GNSS se basent sur le principe de trilatération: je peux déterminer ma position dans l'espace si je connais la distance qui me sépare de trois points dont la position est connue.

De façon tout à fait générale on peut distinguer deux types de problèmes de triangulation: - triangulation dans l'espace Euclidien: on mesure des distances en "ligne droite" dans l'espace. - triangulation sur la sphère: les distances sont mesurées sur la sphère et l'objet à localiser est supposé être sur la sphère.

Les deux types de problèmes font sens en géodésie, mais s'agissant du GNSS c'est le première type de problème qui nous intéresse.

Le problème peut se comprendre de la façon suivante. Être à une distance  $r_i$  d'un point de coordonnées  $(X_i, Y_i, Z_i)$  signifie être sur une sphère de centre  $(X_i, Y_i, Z_i)$  et de rayon  $r_i$ .

Nous savons donc que nous nous trouvons à l'intersection des différentes sphères associées aux satellites  $i = 1 \dots N$ . Ce problème, dit de *triangulation*, est une généralisation du problème d'intersection de deux cercles vu dans la section 2.3, mais généralisé aux trois dimensions de l'espace.

La technique de résolution généralise les manipulations algébriques que nous avons déjà entreprises pour trouver l'intersection de deux cercles. En effet, on se rappelle que nous avons pu nous libérer des termes en  $X_1^2$  et soustrayant les équations. Nous allons généraliser ce raisonnement en utilisant le calcul matriciel.

Soit  $(X, Y, Z)$  les coordonnées de la position à rechercher, et en supposant les  $X_i, Y_i, Z_i$  et  $r_i$  connus, la *contrainte* est:

$$(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2 = r_i^2,$$

pour  $i = 1 \dots n$ ,  $n$  étant le nombre d'observations.

Le but est de linéariser ce système, c'est à dire faire disparaître la plupart des termes du second degré. Pour y arriver, nous allons introduire un *ersatz* en réécrivant toutes les équations de la façon suivante:

$$((X - X_1) - (X_i - X_1))^2 + ((Y - Y_1) - (Y_i - Y_1))^2 + ((Z - Z_1) - (Z_i - Z_1))^2 = r_i^2$$

Or notons que

$$((X - X_1) - (X_i - X_1))^2 = (X - X_1)^2 + 2(X - X_1)(X_1 - X_i) + (X_1 - X_i)^2$$

En répétant pour les trois coordonnées et en additionnant, on trouve:

$$r_i^2 = r_1^2 + 2(X - X_1)(X_1 - X_i) + 2(Y - Y_1)(Y_1 - Y_i) + 2(Z - Z_1)(Z_1 - Z_i) + r_{1i}^2,$$

avec  $r_{ij}$  la distance entre les repères 1 et  $i$ . On pose  $b_{1i} = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_i^2 + r_{1i}^2)$ . En termes matriciels, le système d'équations peut se réécrire:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 \\ X_3 - X_1 & Y_3 - Y_1 & Z_3 - Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n - X_1 & Y_n - Y_1 & Z_n - Z_1 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} X - X_1 \\ Y - Y_1 \\ \vdots \\ X - X_1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Nous avons donc une équation matricielle. En principe, si la matrice  $M$  est  $3 \times 3$  elle admet généralement un inverse, qui peut se calculer très rapidement au moyen d'algorithmes connus.

Mais en pratique, nous attendons souvent plus que trois observations. Le système devient surdéterminé et, généralement, il n'est pas possible de trouver une localisation  $X, Y, Z$  qui satisfasse toutes les équations.

On va donc chercher à *minimiser* les résidu. Posons:  $S = M\vec{x} - b$ . C'est un vecteur de dimension  $n$ . On cherche à *minimiser* son produit scalaire en fonction de  $\vec{x}$ . C'est le problème bien connu des moindres carrés, et dont on connaît l'équation:

$$M^T M \vec{x} = M^T \vec{b}$$

La solution  $\vec{x} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{b}$  peut se calculer avec des algorithmes d'algèbre linéaire extrêmement rapides, largement disponibles dès les années 1970, basés sur le principe de triangulation des matrices.

En réalité, le problème est un peu plus compliqué. En général, le récepteur GNSS ne connaît pas l'heure à la précision atomique. Il n'a donc accès qu'aux différences de temps de réception, donc, aux différences de distances entre les différents satellites.

Pour en savoir plus:

- ▷ Blewitt (1997) Basics of the GPS Technique: Observation Equations (on Moodle)
- ▷ Kaplan and Elliott (1996) Understanding the GPS (on Moodle)

## 7 Les sphères célestes

### 7.1 La sphère céleste locale

Nous définissons la **sphère céleste locale** une sphère imaginaire, centrée sur l'observateur et dont l'horizon constitue un grand cercle. Le **zénith** est dans la direction verticale, définie comme l'orthogonale au géoïde.

Le méridien est le grand cercle comprenant les pôles de la Terre, et le zénith.

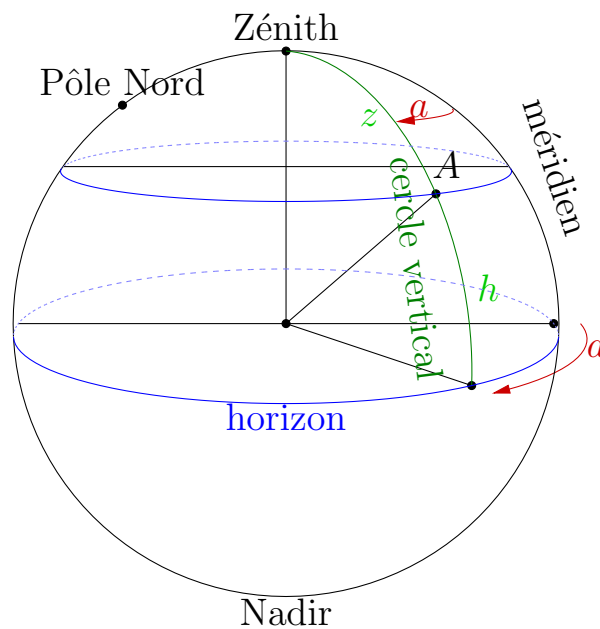


Figure 13: Sphère céleste locale, et son système de coordonnées horizontales.

## 7.2 Les coordonnées horizontales (également appelées azimutales)

Soit une direction  $A$  (par exemple une étoile) représentée par un point sur la sphère céleste locale. Le demi-grand cercle passant par  $Z$  (zénith) et  $A$  s'appelle le **cercle vertical** du point  $A$ .

La **distance zénithale** est le côté  $ZA$  et l'**azimut** est l'angle entre le méridien et le cercle vertical. On peut le mesurer sur l'horizon.

### EXERCICE 10 Distance zénithale d'un cas simple

Quelle est la distance zénithale d'une étoile au couchant ?

## 7.3 Coordonnées horaires

Restons sur la sphère céleste locale, sur laquelle nous sommes maintenant en mesure de positionner le pôle céleste: on peut le voir comme le prolongement de l'axe de rotation de la Terre autour duquel les étoiles décrivent un mouvement apparent. Il est défini par une *direction* : l'observateur trouve la direction du pôle céleste en pointant un baton dans une direction parallèle à l'axe de rotation de la Terre<sup>3</sup>

Considérons maintenant un objet  $A$  sur la sphère (Figure 14). Le petit cercle de pôle  $P$  passant par  $A$  est le *parallèle céleste*. Le demi-grand cercle défini par  $PA$  et venant couper l'équateur est le **cercle horaire**. Le cercle horaire permet de définir les coordonnées horaires.

<sup>3</sup>Nous avons omis dans ce cours de distinguer l'axe de rotation instantané de la Terre et l'axe de "plus grande inertie" de la Terre (perpendiculaire au bourrelet équatorial).

## DEFINITION 6 Coordonnées horaires

Les coordonnées horaires d'un point sur la sphère céleste sont constituées de:

- ▷ L'angle horaire  $H$  est l'angle formé entre le **méridien** et le **cercle horaire**.
- ▷ La **déclinaison**  $\delta$  est la distance du parallèle à l'équateur.

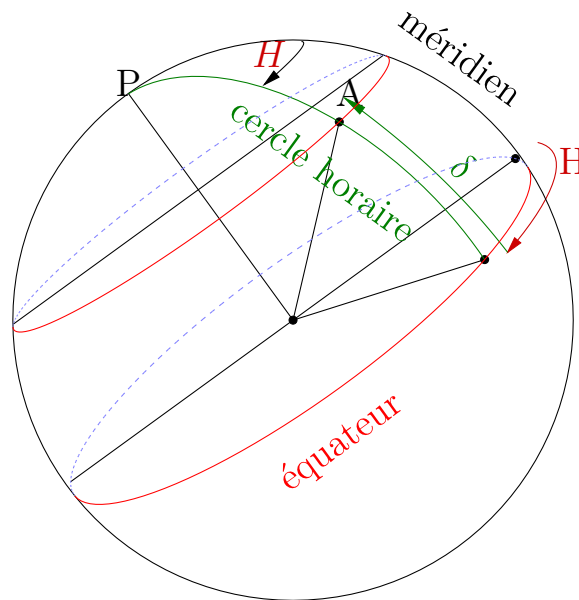


Figure 14: Coordonnées horaires  $H$  et  $\delta$

## 7.4 Transformation des coordonnées horizontales aux coordonnées horaires

Les deux systèmes de coordonnées sont liés par le triangle sphérique  $PZA$  (Figure 15).

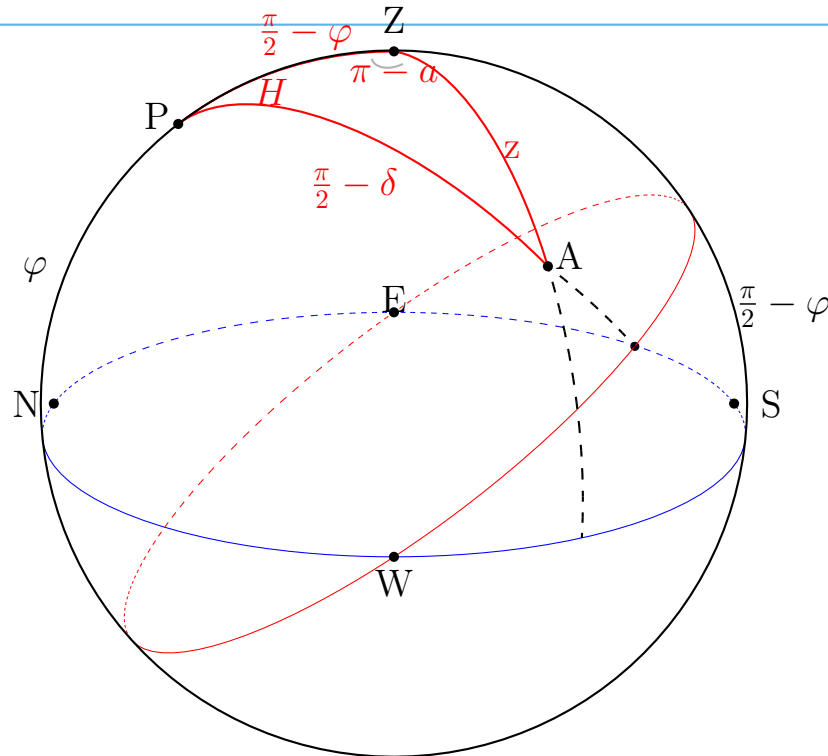


Figure 15: Triangle sphérique permettant la transformation de coordonnées

$$\begin{cases} \cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H \\ \frac{\sin a}{\cos \delta} = \frac{\sin H}{\sin z} \Rightarrow \sin z \sin a = \cos \delta \sin H \end{cases}$$

et, dans l'autre sens:

$$\begin{cases} \sin \delta = \cos z \sin \varphi - \sin z \cos \varphi \cos a \\ \cos \delta \sin H = \sin z \sin a \end{cases}$$

## 7.5 La sphère céleste (des fixes)

Pour positionner les étoiles et les autres axes qui sont fixes par rapport au mouvement de la Terre, on définit une sphère céleste de rayon infini, et qui est centrée au centre de la Terre. On lui choisit un système de coordonnées. Pour caler ce système de coordonnées, on utilise une fois encore le pôle céleste et l'équateur. Il nous faut également un point de référence, qui va jouer le même rôle pour la sphère céleste, que celui joué par le village de Greenwich pour la sphère Terrestre. Ce point est le point  $\Upsilon$ , dit "point vernal" et parfois appelé le "premier point d'Aries". Nous fournirons une définition dans la sous-section 8.4. Pour le moment contentons nous de savoir qu'il existe <sup>4</sup>.

Nous avons déjà vu comment positionner un astre sur la sphère locale. Nous devons maintenant apprendre à le positionner sur la sphère des fixes. Pour cela, nous allons nous permettre une très bonne approximation.

Si l'on considère des objets suffisamment lointains, comme la Lune, le Soleil, et bien sûr les étoiles, on peut admettre que la distance entre l'observateur et le centre de la Terre est négligeable. Par conséquent, la sphère céleste locale et la sphère céleste (des fixes) sont, en pratique, concentriques. Et comme on ne recherche jamais que des directions (le rayon des sphères n'a pas d'intérêt), les deux sphères se confondent, à ceci près que la sphère céleste locale *tourne* dans la sphère céleste des fixes. Nous y reviendrons.

Pour positionner un astre sur la sphère des fixes, nous pouvons donc reprendre la notion de déclinaison. La **déclinaison**  $\delta$ , nous l'avons vu, est l'angle mesuré le long d'un cercle horaire entre l'équateur céleste et l'astre  $A$ . C'est exactement la même quantité que celle définie sur la sphère locale.

---

<sup>4</sup> *Aries* est le mot latin pour Bélier, et le symbole  $\Upsilon$  représente la tête du Bélier. Cependant, le point vernal n'est plus dans la constellation du Bélier: nous reviendrons sur ce point.

Il nous faut également caractériser la position de l'astre autour du pôle. On utilise l'ascension droite.

### DEFINITION 7 Ascension droite

L'ascension droite  $\alpha$  est l'angle mesuré sur l'équateur, entre le point ( $\Upsilon$ ) et l'intersection du cercle horaire avec l'équateur.  $\alpha$  est compté positivement vers l'Est. L'ascension droite est donc, sur la sphère terrestre, une notion similaire à la longitude définie sur la sphère terrestre.

### DEFINITION 8 Coordonnées équatoriales

Le couple  $(\alpha, \delta)$  d'un objet sont ses *coordonnées équatoriales*.

## 7.6 Détermination de la longitude d'un lieu sur base astronomique

En très bonne approximation, nous l'avons vu, le méridien de la sphère céleste est dans le même plan que le méridien géographique associé au lieu d'observation. Considérons dès lors deux observateurs, en  $L$  et  $G$  sur le globe terrestre. Nous pouvons donc définir les plans méridiens correspondant à ces deux observateurs.

Nous avons défini la différence de longitude  $\lambda_L - \lambda_G$  comme l'angle  $\delta\lambda$  du dièdre formé par les deux méridiens. Nous voyons aussi sur la figure 17 qu'un point  $A$  sur la sphère céleste (des fixes), pour l'observateur en  $L$ , un angle horaire  $H_L$  et pour l'observateur en  $G$  (par exemple: Greenwich), un angle horaire  $H_G$ . On a donc :

**RELATION CLÉ****10****Relation entre les angles horaires mesurés par deux observateurs distincts**

$$H_G - H_L = \lambda_G - \lambda_L,$$

quand les longitudes sont comptées positivement vers l'Est.

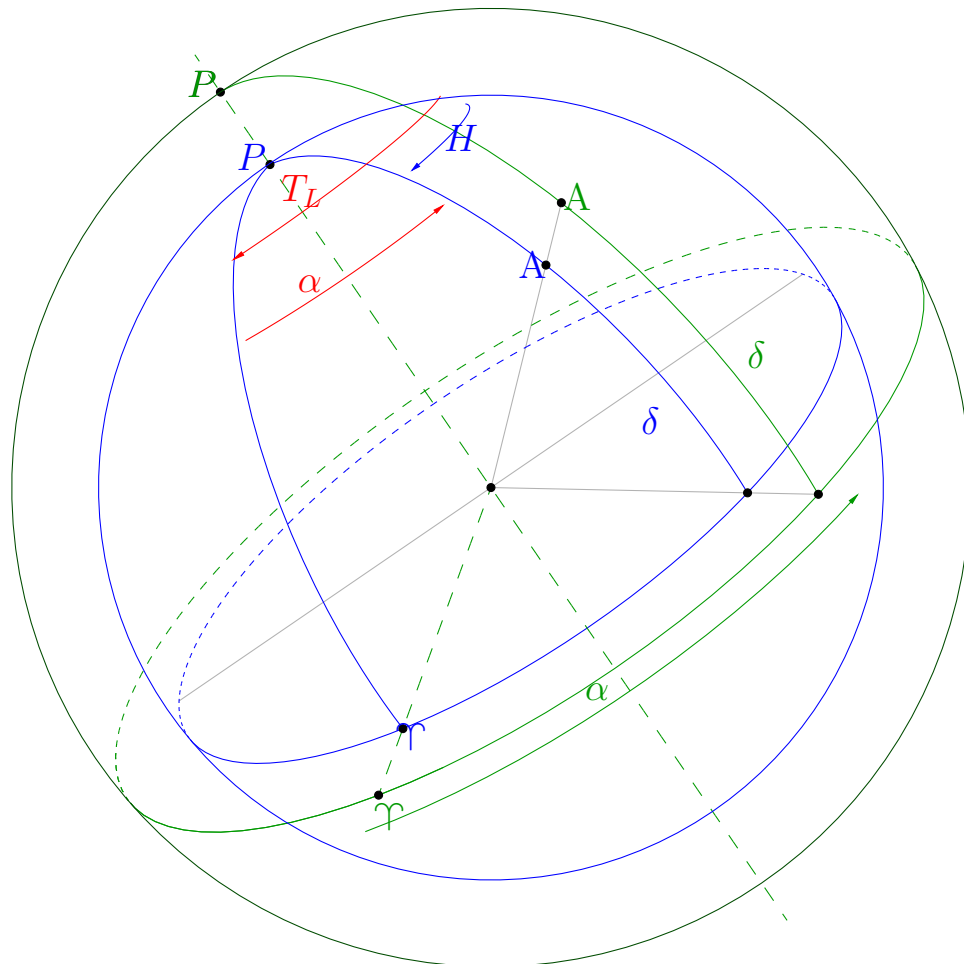


Figure 16: La sphère céleste, parfois (anciennement) appelée "sphère des fixes" (en vert) englobe la sphère céleste locale (en bleu). Les deux sphères sont considérées comme concentriques et leurs rayons respectifs n'a pas d'importance. Elle sont associées ici à deux systèmes de coordonnées différents: coordonnées horaires (en bleu), et coordonnées équatoriales (en vert). La valeur de l'ascension droite a été reportée sur la sphère locale, pour définir le temps sidéral local (en rouge).

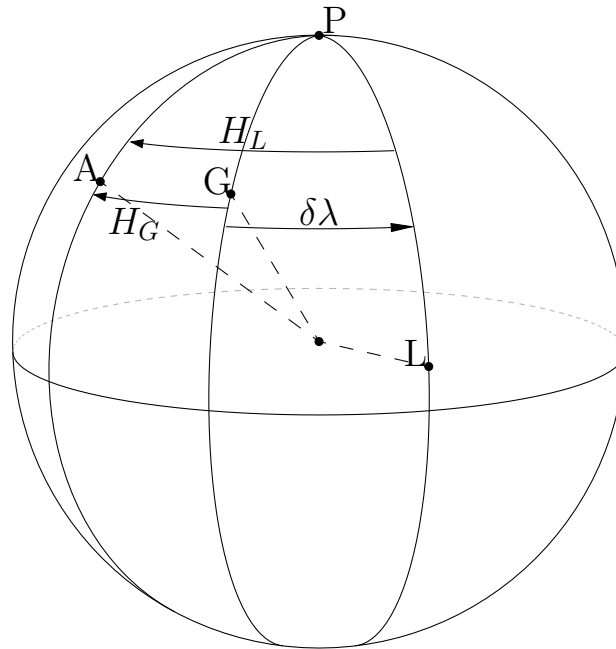


Figure 17: On considère deux points  $S$  et  $G$  sur le globe terrestre, et on représente ici par les lettres  $S$  et  $G$  les projections des zéniths associés à ces deux points sur la sphère céleste, ainsi que les projections de leurs méridiens respectifs. On considère, par ailleurs, une étoile  $A$  sur cette sphère céleste. On trouve alors la relation entre la différence de longitude (angle entre les deux méridiens), et les angles horaires de  $A$  par rapport à ces deux lieux.

## 8 Les mouvements diurnes, annuels, et définition du temps

### 8.1 Le mouvement diurne

Nous avons jusqu'ici défini deux sphères :

- ▷ la sphère céleste locale, centrée sur l'observateur, permet de situer, par rapport à cet observateur, n'importe quel point du ciel. Nous avons considéré deux systèmes de coordonnées possibles : les coordonnées horizontales et les coordonnées horaires, qui toutes deux utilisent le méridien du lieu pour référence.
- ▷ La sphère céleste, centrée sur le centre de la Terre, et qui utilise des points de repères invariants par rapport à la rotation de la Terre.

Nous avons vu que, pour positionner un objet suffisamment éloigné de la Terre, nous pouvons les considérer comme concentriques. En revanche, on ne peut négliger que l'observateur, avec sa sphère céleste locale, tourne autour de l'axe de rotation de la Terre.

Le mouvement diurne est le mouvement apparent des astres associé à la rotation de la Terre. La rotation de la Terre génère une rotation de la sphère locale dans la sphère céleste. Nous pouvons exprimer cette rotation en considérant l'angle entre le méridien local et le point  $\Upsilon$ . Plus précisément, on définit le temps sidéral local :

#### **DEFINITION** 9 Temps sidéral (local)

Le temps sidéral local ( $T_L$ ) est l'angle horaire, sur la sphère céleste locale, du point  $\Upsilon$ . Il est, comme tout angle horaire, compté positivement vers l'Ouest.

Comme la rotation de la Terre est très régulière,  $T_L$  est en très bonne approximation une fonction linéaire du temps de la physique. Nous

décrivons un peu plus tard ce qu'on entend par "temps de la physique" mais supposons qu'il existe. Avec cette définition, on dit que le temps sidéral local  $T_L$  augmente de  $360^\circ$  en 23 h 56 min 04 s. Nous verrons un peu plus loin pourquoi ce n'est pas tout à fait 24 h.

Considérons maintenant un astre (par exemple, une étoile), repéré sur la sphère céleste avec une ascension droite  $\alpha$ . C'est donc l'angle entre le méridien de l'astre et le méridien du point  $\Upsilon$ .

L'angle horaire de cet astre, mesuré sur la sphère céleste locale, est mesuré par rapport au méridien. Comme nous avons défini  $T_L$ , l'angle horaire de  $\Upsilon$ , nous avons (Figure 16) :

### RELATION CLÉ 11 Relation entre angle horaire et temps sidéral

$$H + \alpha = T_L \Leftrightarrow H = T_L - \alpha$$

Les éphémérides publiées par les observatoires donnent généralement la valeur de  $T$  à 0 h Temps Universel pour un lieu de référence, typiquement Greenwich. Notons  $T_G$  le temps sidéral à Greenwich.

Comme le temps sidéral est un angle horaire, il obéit à la relation clé :

$$T_L - T_G = \lambda_L - \lambda_G$$

Il existe par ailleurs des catalogues fournissant  $\delta$  et  $\alpha$  pour toutes les étoiles visibles (par exemple : le *Sky Catalogue 2000.0*). La relation entre le temps sidéral local et le temps sidéral de Greenwich s'établit aisément :

La déclinaison  $\delta$  est l'angle, compté sur le méridien, entre l'équateur et l'astre. Il prend donc la même valeur sur la sphère céleste locale que sur la sphère céleste.

**EXERCICE 11 Lever et coucher d'une étoile**

Connaissant le temps sidéral local  $T_L$  à 0 h temps universel, la latitude  $\varphi$  du lieu, et l'ascension droite  $\alpha$  et la déclinaison  $\delta$  d'une étoile, déterminer l'heure de son lever et de son coucher.

Données de l'exercice :

$$\begin{cases} T_L 0 \text{ h} = 0 \\ \varphi = 60^\circ \\ \delta = 30^\circ \\ \alpha = 180^\circ \end{cases}$$

**8.2 Astres sans lever et coucher**

Un astre ayant  $|\delta| > \frac{\pi}{2} - |\varphi|$  n'a plus de lever ni de coucher.

Dans l'hémisphère Nord : - l'astre sera perpétuellement levé si  $\delta > \frac{\pi}{2} - \varphi$  - l'astre sera perpétuellement couché si  $\delta < -\frac{\pi}{2} - \varphi$

Dans l'hémisphère Sud : - l'astre sera perpétuellement levé si  $\delta < -\varphi + \frac{\pi}{2}$  - l'astre sera perpétuellement couché si  $\delta > \varphi + \frac{\pi}{2}$ .

**8.3 Le mouvement du Soleil**

À l'échelle d'une journée, le Soleil est à peu près fixe par rapport aux étoiles. Il est donc caractérisé par une ascension droite  $\alpha_\odot$  et une déclinaison  $\delta_\odot$ . Son angle horaire varie donc au cours de la journée.

**DEFINITION 10 Temps solaire vrai local**

Le temps solaire vrai local est, par définition, l'angle horaire du centre du Soleil. On le note  $H_{\odot}$ .

On a donc :  $H_{\odot} = T - \alpha_{\odot}$ , où  $\alpha_{\odot}$  est l'ascension droite du Soleil et  $T$  le temps sidéral local.

**8.4 L'écliptique et les coordonnées écliptiques**

Le plan de l'orbite terrestre autour du Soleil est le plan de l'écliptique. Ainsi, par définition, le Soleil se trouve toujours sur l'écliptique. Le nom "écliptique" vient du fait que les éclipses ne peuvent se produire que quand la Lune le traverse.

L'écliptique et l'équateur forment un angle  $\varepsilon$  que l'on appelle l'obliquité. C'est l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport au pôle orbital. C'est à cet angle que l'on doit l'existence des saisons.

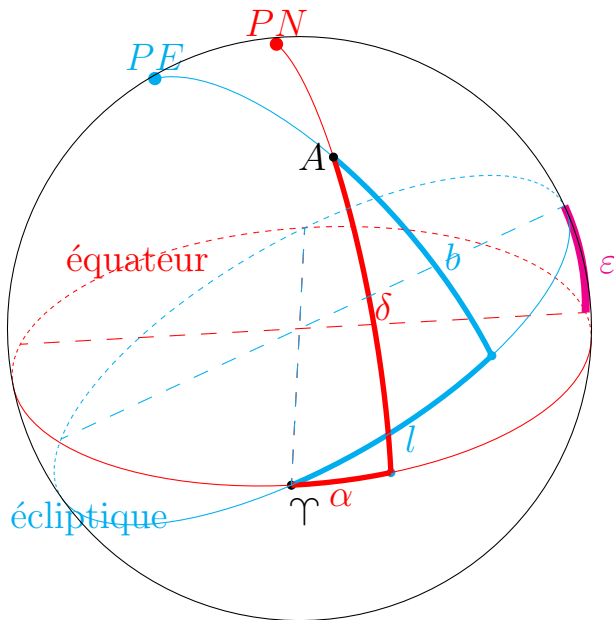


Figure 18: Sphère céleste des fixes sur laquelle on représente l'équateur et l'écliptique, avec leurs pôles respectifs. Cela donne naissance à deux systèmes de coordonnées : coordonnées équatoriales *en rouge*,  $\alpha$  et  $\delta$  et coordonnées écliptiques (en bleu,  $b$  et  $l$ ). Le point  $\Upsilon$  donne l'origine des deux systèmes de coordonnées. L'angle entre l'écliptique et l'équateur est l'obliquité  $\varepsilon$ .

L'obliquité vaut aujourd'hui  $\varepsilon = 23^{\circ}27'$  ; elle varie entre  $\varepsilon = 22^{\circ}$  et  $25^{\circ}$  selon un cycle d'environ 40 000 ans. Ces variations jouent un rôle dans la succession des glaciations.

L'équateur et l'écliptique se croisent en deux points, que l'on nomme nœuds. C'est en utilisant ces nœuds que l'on a, historiquement, défini le point  $\Upsilon$ .

**DEFINITION 11 Point vernal**

On définit le point vernal ( $\Upsilon$ ) le nœud ascendant entre l'équateur et l'écliptique, c'est-à-dire l'endroit où l'écliptique passe au-dessus de l'équateur lorsqu'on la parcourt dans le sens anti-horaire Figure 19.

Vernal est un adjectif qui fait référence au printemps : le Soleil, en effet, est aligné sur le point  $\Upsilon$  le jour de l'équinoxe de printemps dans l'hémisphère Nord.

Une difficulté surgit parce que le nœud ascendant bouge au cours du temps par rapport aux étoiles. C'est une conséquence du phénomène de précession causé par les moments de force de la Lune et du Soleil sur le bourrelet équatorial de la Terre (effet toupie, cf. LPHY1101). Le point  $\Upsilon$  est appelé premier point d'Aries car lorsqu'il a été défini par l'astronome grec Hipparque (130 BC), il était aligné avec l'étoile la plus à l'Est de la constellation du Bélier. Le point  $\Upsilon$  est aujourd'hui dans la constellation des Poissons.

Tout bien pesé,  $\Upsilon$  remplit plutôt mal son office de repère "fixe par rapport aux étoiles", à cause de ce mouvement du nœud ascendant. Pour cette raison, les astronomes considèrent, pour référence, l'équateur terrestre et le nœud ascendant à une époque bien déterminée. Typiquement, on utilise de nos jours le 1er janvier 2000 à 12 h TT (TT signifie Terrestrial Time), et on considère les coordonnées équatoriales des étoiles par rapport aux orientations de l'équateur et au nœud ascendant à ce moment précis.

Le point  $\Upsilon$  nous sert également de référence pour définir les coordonnées écliptiques, avec la latitude écliptique  $b$  et la longitude écliptique (Figure 18).

## 8.5 Le mouvement annuel du Soleil

Au cours de l'année, c'est-à-dire au cours de la révolution de la Terre autour du Soleil, le Soleil va décrire un mouvement apparent. Il reste sur l'écliptique, mais il la parcourt dans le sens anti-horaire de façon à faire un tour (une "révolution") en un an.

Le mouvement (apparent) du Soleil sur l'écliptique obéit aux lois de la mécanique céleste. En particulier, la trajectoire de la Terre décrit une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. La seconde loi de Kepler nous enseigne que la vitesse angulaire de la Terre est plus rapide lorsque la Terre est proche du Soleil.

On peut voir sur la Figure 19 la correspondance entre le mouvement de la Terre autour du Soleil et le mouvement apparent du Soleil sur la sphère céleste. Le Soleil, par définition, est toujours sur l'écliptique, et il est parfaitement aligné sur le point  $\Upsilon$  au moment de l'équinoxe de mars.

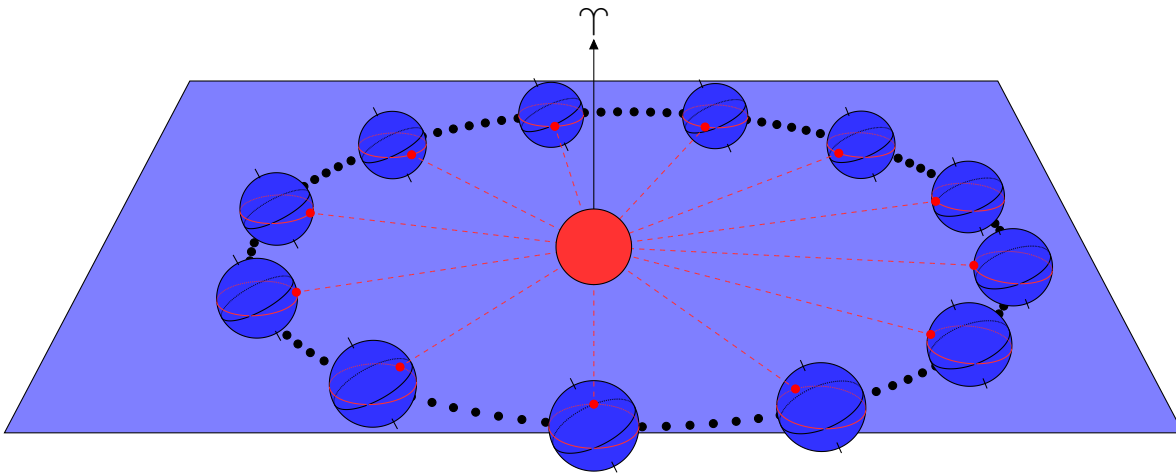


Figure 19: Mouvement de la Terre autour du Soleil, divisé en douze temps égaux, et projection du Soleil sur la sphère céleste (sphère des fixes). Sur cette dernière, l'écliptique est en rouge, et l'équateur en noir. L'équinoxe du mois de mars est en bas : on voit que le Soleil est dans l'alignement du point  $\Upsilon$ , nœud ascendant de l'équateur sur l'écliptique.

Ainsi, si on peut en première approximation admettre que l'ascension droite du Soleil  $\alpha_{\odot}$  augmente à peu près régulièrement au cours de l'année de façon à décrire une révolution en 365,2424 jours, il est nécessaire de tenir compte d'au moins deux corrections :

- ▷ les ralentissements/accélérations de la Terre sur son orbite (notés  $C$ )
- ▷ le terme correctif introduit lorsqu'on transforme le mouvement régulier sur l'écliptique en une variation de l'ascension droite (c'est la "réduction à l'équateur"  $R$ ).

On a donc :

$$\alpha_{\odot} = A_0 + A_1 \cdot t + (C + R) \quad (17)$$

où  $t$  est le temps de la physique,  $A_0$  est une constante, et  $A_1$  est une vitesse angulaire de révolution moyenne qui vaut  $\frac{2\pi}{365,25 \text{ j}}$ .

### 8.5.1 Cercles polaires

Il apparaît dès lors que la déclinaison du Soleil reste comprise entre  $-\varepsilon$  et  $+\varepsilon$ . En tenant compte de la discussion de la section 8.2, on peut voir que pour les latitudes telles que  $|\varphi| > \left|\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right| = 66^{\circ}43'$ , le Soleil va, au moins une fois au cours de l'année, ne pas se lever ou ne pas se coucher. On définit en conséquence les parallèles géographiques :

▷  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  : cercle polaire arctique

▷  $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$  : cercle polaire antarctique

de telle sorte qu'au-delà de ces parallèles on connaît au moins une journée sans lever ni coucher de Soleil.

### 8.5.2 Tropiques

Par ailleurs, le Soleil atteint le zénith lors de son passage au méridien lorsque  $\varphi = \delta$ . Cela est possible pour des latitudes comprises entre  $-\varepsilon$  et  $+\varepsilon$ .

On définit en conséquence les parallèles géographiques :

▷  $\varphi = -\varepsilon$  : le tropique du Capricorne

▷  $\varphi = +\varepsilon$  : le tropique du Cancer

## 8.6 Le temps solaire vrai

La rotation de la Terre se marque par l'évolution du temps sidéral. Nous avons dit qu'elle est très régulière, mais les moyens de mesure modernes permettent de mesurer et même modéliser l'origine de petites irrégularités. On écrit donc que le temps sidéral  $T$  (un angle) augmente linéairement avec le temps que l'on définit  $t$ , mais corrigé de petites inégalités de la rotation terrestre  $\tau$ .

$$T = T_0 + T_1 t + \tau \quad (18)$$

Les irrégularités dénotées par  $\tau$  sont de l'ordre de la milliseconde.

En combinant la relation qui lie, d'une part, l'ascension droite du Soleil au temps de la physique via l'équation (17), on écrit:

$$\begin{aligned} H_{\odot} &= T_0 - A_0 + (T_1 - A_1)t - C + R - \tau \\ H_{\odot} &= \underbrace{H_0 + (T_1 - A_1)t}_{H_m} - E \end{aligned} \quad (19)$$

où l'on a défini  $E = C + R - \tau$  et  $H_0 = T_0 - A_0$ .

On nomme  $H_m = H_0 + (T_1 - A_1)t$  le temps solaire moyen local. C'est une variable qui croît linéairement avec le temps  $t$  de la physique.

La grandeur  $E$  est **l'équation du temps**. On voit que  $H_{\odot} = H_m - E$  : en d'autres termes, le temps solaire moyen est en avance de  $E$  sur le temps solaire vrai. L'écart peut atteindre un quart d'heure, et est principalement lié aux termes  $C$  et  $R$ .

## 8.7 La durée du jour solaire excède celle du jour sidéral

Reprenons la définition du temps moyen. Nous avons posé :

$$T_1 - A_1 = \frac{24 \text{ heures d'angle}}{\text{jour légal}}$$

Or,  $A_1$ , nous l'avons vu plus haut, est lié à l'ascension droite du Soleil.

En un an (approx. 365 jours), l'ascension droite du Soleil augmente de  $360^\circ$  ou encore **24 heures d'angle**. Comme nous l'avons dit,  $A_1$  vaut donc approximativement :

$$\frac{24 \text{ heures d'angle}}{\text{un an}}, \text{ soit } \frac{3 \text{ min } 56 \text{ s}}{\text{jour légal}}$$

Nous avons donc :

$$T_1 = \frac{24 \text{ heures} + 3 \text{ min } 56 \text{ s}}{\text{jour légal}} \quad (20)$$

En un jour légal, le temps sidéral s'accroît de **24 h 3 min 56 s**. En d'autres termes,  $T$  fait une circonférence en  $\frac{86400}{86636}$  jours moyens, soit **23 h 56 min 04 s**. C'est le jour sidéral que nous avons introduit dans le chapitre 5.

## 8.8 Le temps universel

À partir de 1925, le temps universel (T.U.) se définit comme le temps solaire moyen au méridien de Greenwich **augmenté de 12 heures**.

Le temps légal est le temps universel augmenté d'un fuseau horaire, choisi de façon à faire approximativement coïncider le **temps civil** ( $H_m + 12$  h) avec le temps légal.

Pour rappel, on a  $H_L - H_G = \lambda_L - \lambda_G$ . La correction sera donc positive pour  $\lambda_L > \lambda_G$ , c'est-à-dire si  $L$  est à l'Est de  $G$ .

## 8.9 La définition de la seconde

Nous avons jusqu'ici postulé l'existence d'un temps  $t$ , le “temps de la physique”, comme si c'était une évidence et qu'on pouvait le mesurer facilement. Mais encore faut-il le définir.

Historiquement, on a défini la seconde en **posant**  $T_1 = A_1 = 1$  dans l'équation (19) : une seconde, c'est **1/86400** du jour moyen.

C'est le plus commode car notre vie est rythmée par le lever et le coucher du Soleil. Cependant, le jour moyen est quelque chose qui a priori peut évoluer, si bien qu'on se retrouve avec une définition de la physique qui dépend de la rotation de la Terre qu'on voudrait par ailleurs mesurer. En effet, la définition du jour moyen fait intervenir l'équation du temps  $E$  et en particulier le terme  $\tau$ , qui désigne les petites inégalités de la rotation de la Terre. Elles sont très difficiles à connaître et impossibles à prédire car elles dépendent des très nombreux facteurs qui influencent le moment d'inertie de la planète.

C'est pourquoi une définition précise nécessite un autre repère. En **1956**, on a choisi la **révolution** de la Terre autour du Soleil comme horloge naturelle. La seconde était définie comme la fraction  $\frac{1}{31\,556\,925,9747}$  de l'année tropique au **0 janvier 1900** (soit le **31 décembre 1899**). L'année tropique est définie comme le temps pour lequel la longitude écliptique du Soleil moyenne croît de  $360^\circ$ . Ceci correspond approximativement au temps qui sépare deux passages au point vernal.

Aujourd'hui, nous avons une mesure du temps indépendante de l'astronomie, mais choisie de façon à correspondre aux anciennes définitions. À la **treizième Conférence générale des poids et mesures (1967)**, la seconde a été définie comme **9 192 631 770** périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins  $F = 3$  et  $F = 4$  de l'état fondamental  $^2S_{1/2}$  de l'atome de **césium 133**.

- TT Terrestrial Time : c'est une notion physique qui mesure le temps qui passe à la surface de la Terre. En effet, du fait de la relativité générale, le temps ne s'écoule pas de la même manière en tout point de l'Univers. Celui qui nous intéresse est celui qui s'écoule sur Terre. Il existe en effet d'autres "temps", par exemple le Barycentric Coordinate Time qui mesure le temps au barycentre du système solaire.
- TAI Temps atomique international : il égrène les secondes via un réseau d'horloges atomiques, et est calibré de façon à représenter le temps de façon aussi fidèle que possible tel qu'il se déroule sur le géoïde. C'est donc la réalisation pratique du TT depuis 1977.
- UT1 C'est le temps solaire moyen à Greenwich, basé sur la rotation réelle de la Terre. UT1 est donc, contrairement à TT, affecté par les irrégularités et le ralentissement très lent de la rotation de la Terre. Cependant, c'est celui qui importe pour la vie civile puisqu'il est calé sur le Soleil. Il y a donc une différence, petite mais grandissante, entre UT1 et TT.
- UTC Avec le Temps universel coordonné, on utilise à la fois la régularité physique du TAI, mais on le corrige occasionnellement d'une seconde pour qu'il ne s'éloigne pas de UT1. On a donc un temps "atomique", corrigé par à-coups pour rester fidèle à la Terre. C'est l'UTC qui sert de référence au temps civil. Le temps civil est l'UTC, affecté d'un fuseau horaire.

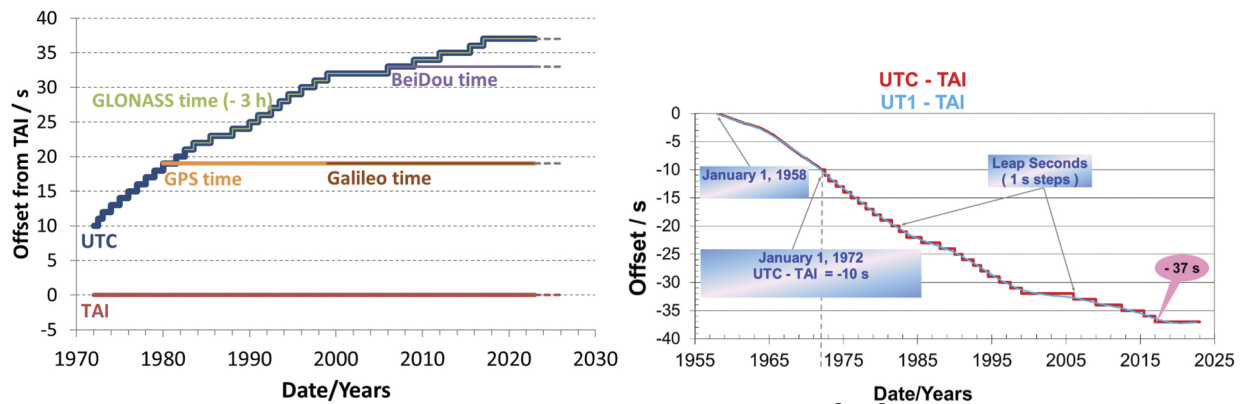


Figure 20: Définitions des temps, [? ]

## 8.10 Synthèse: Deux problèmes types

**1. Coucher du Soleil** Connaissant la latitude et la longitude d'un lieu, la déclinaison du Soleil et l'équation du temps, quelle est l'heure civile du coucher du Soleil ?

La première étape est de déterminer l'angle horaire du coucher du Soleil. Il faut résoudre le triangle sphérique  $PZA$  (cf. Figure 15), en utilisant le fait que  $z = \pi/2$  au coucher. Une façon de procéder est d'isoler  $H$  dans la relation des cosinus qui lie les côtés  $PZ$ ,  $PA$  et l'angle  $H$  à  $\cos z$ .

L'angle horaire du Soleil est le **temps solaire vrai local**. Nous pouvons trouver le **temps solaire moyen local** en le corrigeant par l'équation du temps  $E$  (supposée connue). De là, on calcule le temps solaire moyen de Greenwich en utilisant la longitude du lieu. À douze heures près, c'est le **temps universel (UTC)**. Reste à tenir compte du fuseau horaire pour obtenir l'heure civile (ou légale).

**2. Déterminer les coordonnées géographiques d'un lieu** Quelles sont la latitude et la longitude d'un lieu sur la base de l'observation d'un astre, connaissant : - le temps universel coordonné (UTC) de l'observation, - le temps sidéral à Greenwich à minuit, - les coordonnées

équatoriales (ascension droite et déclinaison) de l'astre observé ?

**Résolution :** Il faut d'abord observer les coordonnées horizontales de l'astre ( $z$  et  $a$ ). Comme on connaît la déclinaison, on dispose en tout de trois informations, ce qui permet de résoudre le triangle sphérique  $PZA$  (cf. Figure 15). Cela donne la latitude et l'angle horaire  $H$ .

Le temps sidéral local  $T_L$  au moment de l'observation obéit à la relation  $H + \alpha = T_L$ , où  $H$  est l'angle horaire et  $\alpha$  l'ascension droite de l'astre.

Connaissant l'UTC de l'observation et l'UTC à minuit, on calcule le temps sidéral de Greenwich de l'observation en utilisant les relations 18 et 20 :

$$T_{G\text{observation}} = T_{G\text{minuit}} + t \cdot \frac{24 \text{ h } 03 \text{ min } 04 \text{ s}}{24 \text{ h}}$$

où  $t$  est le temps écoulé depuis minuit UTC.

La différence de longitude est la différence entre le temps sidéral local et le temps sidéral à Greenwich au moment de l'observation, en vertu de la relation valable pour tout angle horaire (donc en particulier pour l'angle horaire du point vernal  $\Upsilon$ ) :

$$H_L - H_G = \lambda_L$$

---

PART II:

PROJECTIONS CARTOGRAPHIQUES

## 9 Principes généraux de cartographie

### 9.1 Le globe générateur

Nous introduisons le concept de *globe générateur* : une forme tridimensionnelle qui représente le géoïde, et sur lesquels les angles, les rapports de distance et de longueurs sont les mêmes que sur la Terre.

C'est ce globe générateur que l'on projette sur un plan. Pour un cours d'introduction aux projections cartographiques, on peut dans un premier temps ignorer la différence entre le rayon équatorial et le rayon polaire. Le géoïde prend alors la forme d'une sphère.

Le globe générateur sera donc ici une sphère de rayon  $r$ . Le rapport entre le rayon  $r$  et le rayon terrestre  $R$  est l'échelle nominale (ou encore, *échelle linéaire*).

Concrètement, sur la carte, on se choisit un système de coordonnées telles que une unité de longueur vaut  $r$ . Concrètement, si, par exemple, on choisit  $r = 63.4\text{cm}$  (échelle nominale  $1/10\,000\,000$ ), les coordonnées  $(x, y)$  sur la carte devront être portées, physiquement, à une distance de  $x \cdot 63.4\text{cm}$  et  $y \cdot 63.4\text{cm}$  de l'origine.

Si on admet que le globe générateur est une réplique fidèle de la forme de la Terre avec une échelle nominale, la projection va, elle, engendrer des déformations de longueur, d'angle et de surface. L'échelle *locale* sera donc le produit de l'échelle nominale et de facteurs de déformation locaux, qui, généralement, dépendent de la direction. Ce sont ceux que nous allons caractériser maintenant.

Dans la suite de l'exposé, le globe générateur est simplement nommé "globe". On écrira souvent  $r = 1$  par facilité mathématique, mais on se souvient que lorsqu'on trace la carte "en vrai", les coordonnées cartésiennes doivent être multipliées par la vraie valeur de  $r$ , qui est

le rayon terrestre  $R$  multiplié par l'échelle nominale.

## EXERCICE

### 12 Le globe générateur

Faites un schéma du principe de projection cartographie tel que défini ci-dessus.

## 9.2 Définir une projection

La globe que nous désirons cartographier est un objet géométrique que l'on peut caractériser par

- ▷ un *système de coordonnées*, typiquement la latitude ( $\varphi$ ) et la longitude ( $\lambda$ )
- ▷ une *métrique*, qui définit les distances, les surface et les angles. Ainsi nous avons vu, notamment lorsque nous avons développé la notion de loxodromie, que la distance infinitésimale associée à un incrément de latitude et de longitude sur un globe sphérique de rayon 1 vaut (eq. (11))

$$dS^2 = (d\phi^2 + \cos^2 \phi d\lambda^2),$$

et que l'angle entre l'incrément de position infinitésimal et le méridien satisfait les relations  $\cos \gamma dS = d\phi$  et  $\sin \gamma dS = \cos \phi d\lambda$ .

- ▷ Une *topologie*, c'est à dire des propriétés qui expriment la notion de voisinage des points. Le globe terrestre est une surface à deux dimensions, sans trous et sans bords. Ces caractéristiques topologiques se reflètent dans les propriétés du système de coordonnées. Notamment,
  - la longitude est périodique (la longitude de  $359.9^\circ$  est voisine celle de  $360.1^\circ$ , qui est équivalente à  $0.1^\circ$ ;
  - la latitude est bornée ente  $-90$  et  $90^\circ$  et, par ailleurs,
  - les latitudes polaires sont singulières (la longitude n'y est plus pertinente). Quand vous êtes au pôle Nord, quelque soit le pas

que vous faites, vous allez vers le Sud: il n’y a plus d’Ouest ni d’Est.

Réaliser une projection revient donc projeter ce système de coordonnées à la surface de la sphère  $(\varphi, \lambda)$  sur un *autre* système de coordonnées qui est général relatif à un plan — par exemple, un système de coordonnées  $(x, y)$ .

Mathématiquement, cela revient à définir des fonctions  $x(\varphi, \lambda)$  et  $y(\varphi, \lambda)$ .

A priori, nous aimerions qu’une projection cartographique sur le plan, respecte les relations de distances, les angles, la topologie, les azimuts et les surfaces. Le “théorème remarquable” de Gauss (1827) nous affirme que ce n’est pas possible. Ainsi, le choix des fonctions  $x$  et  $y$  n’est pas trivial car on sait par avance qu’on ne pourra pas conserver toutes les propriétés métriques et topologiques du globe. Sur un planisphère centré sur l’Europe, Hawaïi bien plus loin du Japon que de l’Europe; dans certains cas (projection de Mercator), le Groënland (2.1 millions de  $\text{km}^2$ ) apparaît bien plus grand que l’Afrique (30.4 millions de  $\text{km}^2$ ), alors que sur d’autres projections (Peters), il semble plus large (pourtant 1050 km) que long (pourtant 2670 km). La projection de Goode (1927) offre un compromis intéressant entre respect des formes et des aires, mais saccage le Groenland et l’Antarctique en les coupant en deux et en quatre. Le choix d’une projection dépend donc de l’usage que l’on veut en faire.

Le journal “The Guardian” propose [quelques projections](#).

### 9.3 Les indicatrices de Tissot

L’indicatrice de Tissot est le concept mathématique qui va nous permettre d’appréhender les déformations causées par une projection, et d’identifier les propriétés que nous pouvons exiger d’une projection.

Revenons d'abord au globe (donc, désormais, de rayon 1), avec son système de latitude et de longitude. Pour rappel (section précédente).

Considérons, sur ce globe, un cercle de rayon infinitésimal  $dS$ , centré en  $(\phi, \lambda)$ . Nous pouvons paramétrer ce cercle comme l'ensemble des points situés à une distance  $dS$  du centre, et que l'on inventorie comme une fonction de l'azimut  $\gamma$ , compris entre 0 et  $2\pi$ . On peut écrire, pour chaque valeur de  $\gamma$ , le rayon vecteur qui lie le centre du cercle au point du cercle considéré  $\overrightarrow{dS}$ . Il correspond à des incréments de latitude et de longitude que nous noterons, respectivement,  $(d\phi(\gamma)$  et  $d\lambda(\gamma))$ , tels que la norme du vecteur est constante et égale à  $dS$  avec:

$$dS^2 = d\phi(\gamma)^2 + \cos^2 \phi d\lambda(\gamma)^2,$$

On trouve la métrique ci-dessous en reprenant les relations déjà explorées pour la loxodromie  $d\phi(\gamma) = \cos \gamma dS$  et  $d\lambda = \frac{1}{\cos \phi} \sin \gamma dS$ .

Par commodité mathématique, nous définissons l'incrément  $d\Lambda(\gamma) = \cos \phi d\lambda$ , tel que  $dS^2 = d\phi(\gamma)^2 + d\Lambda(\gamma)^2$  que nous allons utiliser à plusieurs reprises. Soyons bien attentifs à ne pas confondre ces deux grandeurs:  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

Projetons maintenant ces deux fonctions dans le plan, en considérant la projection définie par les fonction  $x(\phi, \lambda)$  et  $y(\phi, \lambda)$ .

Nous générons une courbe fermée définie par les incréments  $dx(\gamma)$  et  $dy(\gamma)$ , que nous pouvons calculer en utilisant les méthodes du calcul différentiel:

$$\begin{aligned} dx(\gamma) &= \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi(\gamma) + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda(\gamma) \\ dy(\gamma) &= \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi(\gamma) + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda(\gamma) \end{aligned}$$

que l'on peut par ailleurs réécrire comme:

$$\begin{aligned} dx(\gamma) &= \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi(\gamma) + \frac{\partial x}{\partial \Lambda} d\Lambda(\gamma) \\ dy(\gamma) &= \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi(\gamma) + \frac{\partial y}{\partial \Lambda} d\Lambda(\gamma), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\text{avec } \frac{\partial x}{\partial \Lambda} = \frac{\partial x}{\cos \phi \partial \lambda} = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Nous allons maintenant démontrer que la figure générée sur la projection est une ellipse et nous allons en chercher les propriétés.

Remarquons d'abord que la norme de l'incrément projeté  $ds(\gamma)$  satisfait:

$$\begin{aligned} ds^2(\gamma) &= dx(\gamma)^2 + dy(\gamma)^2 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi(\gamma) + \frac{\partial x}{\partial \Lambda} d\Lambda(\gamma) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi(\gamma) + \frac{\partial y}{\partial \Lambda} d\Lambda(\gamma) \right)^2 \\ &= \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 \right) (d\phi(\gamma))^2 + \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right)^2 \right) (d\Lambda(\gamma))^2 + \\ &\quad 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right) d\phi(\gamma) d\Lambda(\gamma) \end{aligned} \tag{22}$$

On peut nettoyer cette équation avec quelques définitions. Si

l'incrément  $\overrightarrow{dS}$  est le long d'un méridien, vers le Nord, alors l'azimut  $\gamma = 0$ , et  $d\phi(\gamma) = dS$ ;  $d\Lambda(\gamma) = 0$ . Dans ce cas particulier:

$$ds^2(0) = \underbrace{\left( \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 \right)}_{h^2} dS^2 \stackrel{\text{def}}{=} h^2 dS^2,$$

où nous avons défini  $h$ , le facteur de distorsion le long du méridien. C'est généralement une fonction de la latitude et de la longitude, car les dérivées partielles peuvent en effet varier en fonction de la position.

Le long d'un parallèle, nous définirons de façon analogue le facteur de distorsion  $k$ :

$$ds^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\left( \left( \frac{\partial x}{\partial \Lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right)^2 \right)}_{k^2} dS^2 \stackrel{\text{def}}{=} k^2 dS^2,$$

Nous savons déjà que un incrément infinitésimal de longueur  $dS$  le long d'un méridien va se traduire dans le plan par un incrément  $(dx(0), dy(0))$  de longueur  $h dS$ , et le long d'un parallèle, par un incrément  $(dx(\frac{\pi}{2}), dy(\frac{\pi}{2}))$  de longueur  $k dS$ , tels que donnés par les équations (21). Le cosinus de l'angle entre les deux,  $\cos \theta$ , est obtenu en utilisant le produit scalaire entre ces deux vecteurs  $(\overrightarrow{ds}(0) \cdot \overrightarrow{ds}(\frac{\pi}{2})) = \cos \theta \|\overrightarrow{ds}(0)\| \|\overrightarrow{ds}(\frac{\pi}{2})\|$ . On trouve:

$$hk \cos \theta = \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right)$$

En utilisant  $h$ ,  $k$  et  $\cos \theta$ , on simplifie la métrique:

$$ds^2(\gamma) = h^2 d\phi(\gamma)^2 + k^2 d\Lambda(\gamma)^2 + 2hk \cos \theta d\phi(\gamma) d\Lambda(\gamma).$$

On peut réexprimer les incréments en fonction de  $dS$  (en utilisant  $\sin(2\gamma) = 2 \cos \gamma \sin \gamma$ ):

$$ds^2(\gamma) = dS^2(h^2 \cos^2 \gamma + k^2 \sin^2 \gamma + hk \cos \theta \sin(2\gamma))$$

C'est bien l'équation paramétrique d'une ellipse. Pour le voir, on peut se définir un repère centré sur l'indicatrice, avec  $dx = dS \cos \gamma$  et  $dy = dS \sin \gamma$ . L'équation paramétrique contient au plus des termes du second degré en  $dx$  et  $dy$  et, de plus, la distance au centre  $dds^2$  est bornée.

L'ellipse se réduit d'ailleurs à un cercle dans le cas particulier  $h = k$  et  $\cos \theta = 0$ .

Nous pouvons trouver les valeurs d'azimut  $\gamma$  correspondant aux demi-grand axe et demi-petit axe en cherchant les valeurs pour lesquelles  $ds^2(\gamma)$  est optimum:

$$\frac{d}{d\gamma} ds^2(\gamma) = 0.$$

En tenant compte des identités  $\frac{d \sin^2(\gamma)}{d\gamma} = -\frac{d \cos^2(\gamma)}{d\gamma} = \sin(2\gamma)$  on trouve:

$$\frac{2hk \cos \theta}{h^2 - k^2} = \text{tg}(2\gamma_m). \quad (23)$$

Deux solutions existent:

$$\gamma_{m,a} = \frac{1}{2} \text{arctg}\left(\frac{2hk \cos \theta}{h^2 - k^2}\right) \text{ et } \gamma_{m,b} = \frac{1}{2} \text{arctg}\left(\frac{2hk \cos \theta}{h^2 - k^2}\right) + \frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

Cette observation nous amène à un théorème important, directement lié à la théorie des indicatrices de Tissot:

### THÉORÈME 4 Directions propres

Dans le cas général, il existe deux directions à angle droit sur la sphère, qui sont projetées à angle droit dans la projection, et qui correspondent aux directions avec les facteurs d'échelle minimum et maximum. Dans le cas particulier  $h = k$  et  $\cos \theta = 0$ , alors tous les angles droits sur la sphère sont préservés

Nous venons de considérer le cas général, les directions d'échelle minimum et maximum correspondant aux axes de l'ellipse. Dans le cas  $h = k$  et  $\cos \theta = 0$ , nous avons vu que cercle caractéristique est projeté sur un cercle, et nous verrons un peu plus loin qu'aucun angle n'est déformé.  $\square$

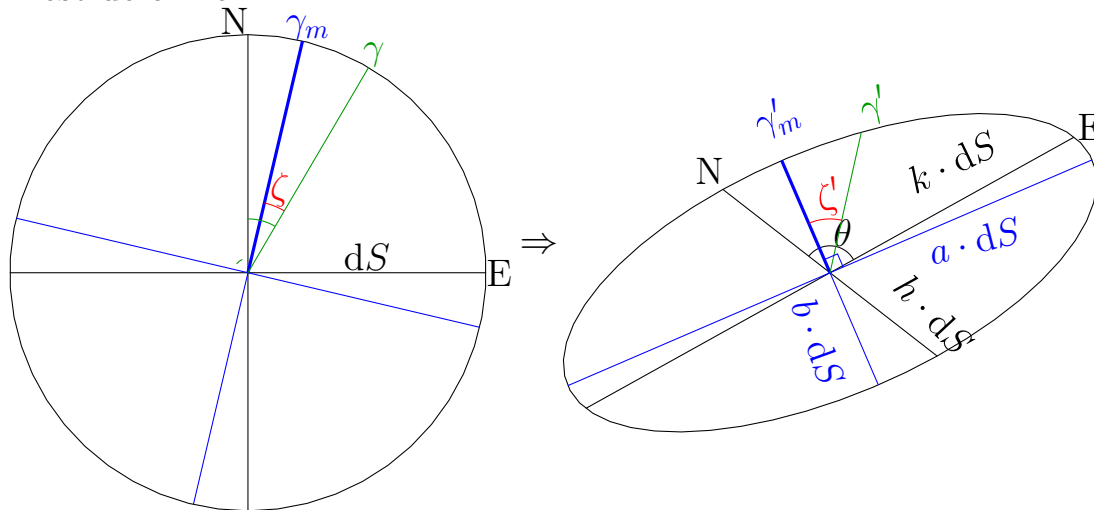


Figure 21: Transformation d'un cercle de rayon  $dS$  sur la sphère (à gauche) en une indicatrice de Tissot.

Connaître les valeurs des demi-axes de l'ellipse par cette méthode est un peu laborieux mais possible. On reprend l'égalité:

$$ds^2(\gamma) = dS^2(h^2 \cos^2 \gamma + k^2 \sin^2 \gamma + hk \cos \theta \sin(2\gamma))$$

en utilisant  $2 \cos^2 \gamma = 1 - \cos(2\gamma)$ ,  $2 \sin^2 \gamma = 1 + \cos(2\gamma)$ , ce qui simplifie la relation:

$$ds^2(\gamma_m) = dS^2(h^2 + k^2 + \cos(2\gamma_m) \frac{h^2 - k^2}{2} + hk \cos \theta \sin(2\gamma_m)) \quad (25)$$

et on utilise (23) sous la forme:  $\cos(2\gamma) \frac{2hk \cos \theta}{h^2 - k^2} = \sin(2\gamma_m)$ , soit,  $\cos(2\gamma) = \sin(2\gamma_m) \frac{h^2 - k^2}{2hk \cos \theta}$ . On remplace  $\cos(2\gamma_m)$  dans l'équation (25) pour obtenir:

$$ds^2(\gamma_m) = dS^2(h^2 + k^2 + \sin(2\gamma_m) \left( \frac{(h^2 - k^2)^2}{2hk \cos \theta} + hk \cos \theta \right))$$

reste, en principe, à utiliser la relation (tirée de Pythagore)  $\pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2(2\gamma)}{\operatorname{tg}^2(2\gamma)+1}} = \sin(2\gamma)$ . On le voit, l'opération est un peu fastidieuse (mais pas impossible) et nous verrons un peu plus loin une façon un peu plus directe d'arriver au résultat que voici. On pose d'abord deux variables intermédiaires:

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \sin \theta}, \\ b' &= \sqrt{h^2 + k^2 - 2hk \sin \theta} \end{aligned} \quad (26)$$

et on trouve que les deux axes sont

$$\begin{aligned} a &= (a' + b')/2 \\ b &= (a' - b')/2, \end{aligned} \quad (27)$$

tels que, on peut le vérifier,  $ds^2(\gamma) = a^2 dS^2$  en prenant la racine positive, et  $ds^2(\gamma) = b^2 dS^2$  en prenant la racine négative.

### RELATION CLÉ 12 Orientation et grandeurs des demi-grand axes de l'indicatrice

L'indicatrice de Tissot est une ellipse, dont les deux axes sont donnés par les relations (27) et (26), correspondant aux azimuts fournis par les relations (24).

### EXERCICE 13 Tracer une indicatrice de Tissot

Un exercice type consiste à tracer une indicatrice de Tissot pour une projection déterminée.

La première chose est de choisir une échelle, ce que l'on fait généralement arbitrairement. On peut par exemple décider qu'une échelle locale de 1 va être représentée par un segment de 1cm. C'est arbitraire, mais l'échelle choisie doit être inchangée si l'on trace différentes indicatrices pour une même projection.

Il faut ensuite déterminer les directions des axes principaux de l'ellipse. Elles sont données par les équations 24, qui elle-même nécessite de connaître  $\cos \theta$ . Il est donné par l'équation 28, mais il n'est pas toujours nécessaire de l'utiliser explicitement. Dans de nombreux cas, on peut montrer que les méridiens et parallèles se coupent à angle droit sur la projection (e.g., projections coniques) et, dans ce cas,  $\cos \theta = 0$ . C'est le cas le plus simple, où  $\gamma_{m,a} = 0$  (axe orienté Sud-Nord), et  $\gamma_{m,b} = \frac{\pi}{2}$  (axe orienté Est-Ouest).

On donne à ces axes les longueurs  $a$  et  $b$  calculées avec les formules (27).

## 9.4 Préservation des aires

Le rapport entre l'aire projetée et l'aire sur le globe et l'aire projetée est  $ab = \frac{1}{4}(a'^2 - b'^2) = hk \sin \theta$ . On dit que la projection est *équivalente* si ce rapport vaut 1, soit  $ab = 1$ .

### DEFINITION 12 Projection équivalente

Une projection est dite équivalente lorsqu'elle ne déforme pas les aires. La condition d'équivalence est  $ab = 1$ .

En principe, on pourrait calculer  $\sin \theta$  à partir de  $\cos \theta$  avec Pythagore, mais c'est un peu fastidieux.

Une façon plus directe est de considérer le produit vectoriel  $\|\vec{ds}(0) \times \vec{ds}(\frac{\pi}{2})\| = \sin \theta \|\vec{ds}(0)\| \|\vec{ds}(\frac{\pi}{2})\|$ .

On trouve alors la formule dont nous avons besoin pour tester l'équivalence:

$$hk \sin \theta = \left( \frac{\partial x}{\partial \Lambda} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \right) \quad (28)$$

On réexprime le critère d'équivalence en fonction de  $\phi$  et  $\lambda$ :

$$hk \sin \theta = \frac{1}{\cos \phi} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = 1 \quad (29)$$

## 9.5 Préservation des angles

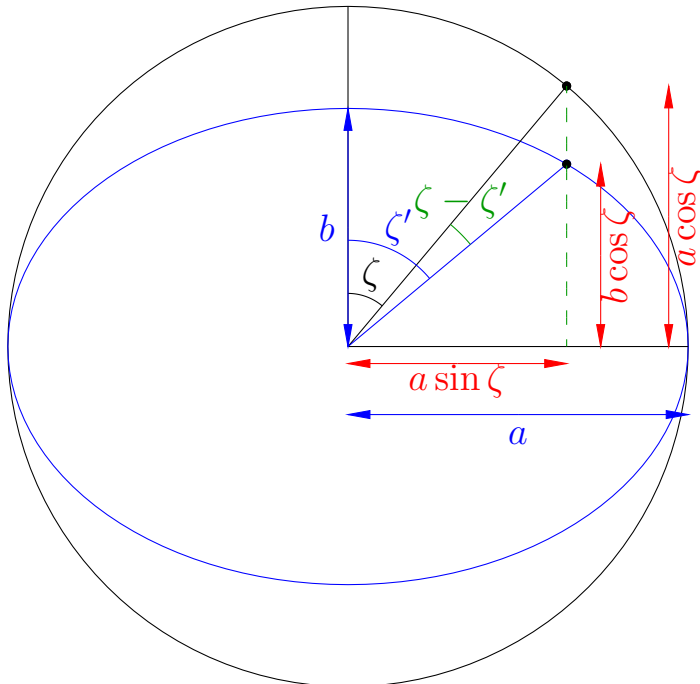


Figure 22: Déformation des angles : En noir le cercle sur la sphère, en blue, sa projection sur le plan (l'indicatrice), avec ses deux axes  $a$  et  $b$ . Un angle  $\zeta$  par rapport à l'axe verticale sur la sphère, devient  $\zeta'$  sur la projection.

La déformation des angles provient de l'appplatissage du disque projeté, qui devient une ellipse. Dénommons  $\zeta$  l'azimut mesuré par rapport à la direction propre (correspondant au petit axe de l'ellipse projetée, Fig. 21), et  $\zeta'$  son correspondant sur l'ellipse projetée. Il est possible d'exprimer mathématiquement la déformation  $\zeta - \zeta'$  en superposant l'ellipse avec le cercle originel, mis à l'échelle (sans déformation) tel que le rayon du cercle correspond au demi-grand axe de l'ellipse. A priori, on ne sait pas lequel des axes  $a$ , et  $b$ , est le plus grand des deux. Nous allons émettre l'hypothèse que c'est  $a$ , et nous reviendrons sur cette hypothèse quand nous aurons terminé. On note

alors la relation suivante:

$$\operatorname{tg} \zeta' = \frac{a \sin \zeta}{b \cos \zeta}.$$

Nous avons posé  $(1 - f) = b/a$ . On a  $\operatorname{tg} \zeta' = \frac{1}{(1-f)} \operatorname{tg} \zeta$ .

Cherchons la différence  $\zeta - \zeta'$ :

$$\zeta - \zeta' = 1 - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-f} \operatorname{tg} \zeta\right).$$

On cherche la valeur de  $\zeta$  qui maximise cette différence. Pour cela, on prend la dérivée de l'expression par rapport à  $\zeta$  et on cherche à l'annuler:

$$0 = \left. \frac{d(\zeta - \zeta')}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_m} = 0 - \frac{1}{1 + \frac{1}{(1-f)^2} \operatorname{tg}^2 \zeta_m} \frac{\frac{1}{1-f}}{\cos^2 \zeta_m}.$$

Soit:

$$\left(1 + \frac{1}{(1-f)^2} \operatorname{tg}^2 \zeta_m\right) = \frac{1}{(1-f)} \frac{1}{\cos^2 \zeta_m}$$

En multipliant les deux termes par  $(1-f)^2 \cos^2 \zeta_m$  On aboutit à la relation:

$$(1-f)^2 \cos^2 \zeta_m + \sin^2 \zeta_m = (1-f),$$

soit, en utilisant Pythagore et après calcul:

$$\cos \zeta_m = \frac{1}{\sqrt{(1-f) + 1}}, \quad \sin \zeta_m = \frac{\sqrt{(1-f)}}{\sqrt{(1-f) + 1}}, \quad \operatorname{tg} \zeta_m = \sqrt{1-f}$$

ce qui, au passage, indique que  $\operatorname{tg} \zeta'_m = \frac{1}{\sqrt{1-f}}$ .

La différence entre les deux angles, à son maximum, donc, vaut

$$\sin(\zeta_m - \zeta'_m) = \sin \zeta_m \cos \zeta'_m - \sin \zeta'_m \cos \zeta_m = \frac{(1-f) - 1}{(1-f) + 1} = \frac{a-b}{a+b}$$

Si on regarde bien la Figure 22, la plus grande différence que l'on pourrait jamais avoir entre une mesure d'angle sur la sphère, et sur sa projection, qu'on notera  $\omega$ , vaut  $2|\zeta_m - \zeta'_m|$ . Ce qui revient à noter:  $|\zeta_m - \zeta'_m| = \omega/2$ .

### RELATION CLÉ 13 Déformation des angles

La plus grande différence  $\omega$  entre un angle mesuré sur la sphère et un angle mesuré sur la sphère et sur la projection satisfait la relation:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{|a-b|}{|a+b|}$$

Notez les valeurs absolues. En effet, rappelons nous qu'en début de démonstration nous avons émis l'hypothèse que  $a \geq b$ , mais en réalité nous n'en savons rien. Ca  $b \geq a$  nous aurions fait la même démonstration, mais avec le rôle de  $a$  et  $b$  inversé, et nous aurions obtenu, dans ce cas,  $\sin(\frac{\omega}{2}) = \frac{b-a}{a+b}$ . On synthétise les deux cas avec l'emploi de la valeur absolue.

### DEFINITION 13 Projection conforme

Une projection est dite conforme lorsqu'elle ne déforme pas les angles. La condition de conformité est  $a = b$ .

Pour les étudiant·es davantage portés sur l'algèbre, nous donnons en

annexe A la théorie algébrique de l'indicatrice, sous forme matricielle. On peut y voir que les axes de l'indicatrice correspondent à des vecteurs propres, et la déformation d'aire au produit des valeurs propres.

## 10 Projections cylindriques

### 10.1 Définition d'une projection cylindrique

La projection cylindrique peut se visualiser comme un projection de la sphère sur un cylindre (tangent ou sécant). Dans le cas le plus fréquent (projection standard), le cylindre est orienté parallèlement à l'axe des pôles.

Mathématiquement,

$$\begin{aligned}x &= \cos \phi_0 (\lambda - \lambda_0), \\y &= y(\phi).\end{aligned}\tag{30}$$

Il n'y a pas de dérivées croisées ( $\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0$ ), si bien que l'angle entre les parallèles et les méridiens est toujours droit ( $\cos \theta = 0$ ).

En utilisant les formules pour les facteurs de distorsion:

$$h(\phi) = \frac{\partial y}{\partial \phi},\tag{31}$$

$$k(\phi) = \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi}\tag{32}$$

on voit d'emblée que l'échelle le long de l'horizontale  $k$  varie avec la latitude. La projection cylindrique a donc une échelle très variable le long de la latitude, et cela est dû au fait que tous les parallèles sont représentés avec la même longueur. L'échelle n'est plus définie aux pôles ( $h(\pm\pi/2) = \infty$ ). On peut interpréter  $\phi_0$  comme la latitude à laquelle le cylindre coupe le globe générateur. C'est aussi la latitude à laquelle la distorsion le long des parallèles vaut 1.

L'absence de dérivées croisées implique également que, *dans une projection cylindrique*, les distorsions  $h$  et  $k$  sont égales aux axes principaux des indicatrices de Tissot:

$h = a$  le long d'un méridien

$k = b$  le long d'un parralèle

Cela simplifie fortement l'expression des critères d'équivalence et de conformité.

- ▷ Il y aurait équivalence pour  $hk = 1$ , soit  $k = \frac{\cos \phi}{\cos \phi_0}$ ,
- ▷ Il y aurait conformité pour  $h = k$ .

Les deux critères ne peuvent être satisfaits en même temps.

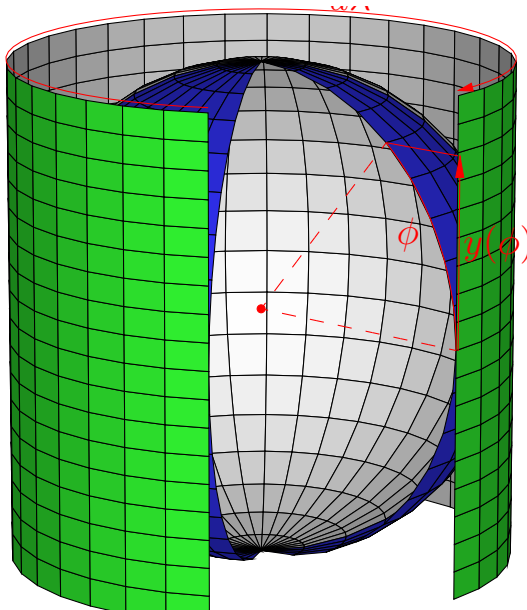


Figure 23: Projection cylindrique standard. Dans le cas particulier de la projection orthographique (Lambert),  $y(\phi) = \sin \phi$ .

## 10.2 La projection de Mercator (XVIIe siècle)

La projection de Mercator satisfait la condition de conformité, et elle n'est donc pas équivalente. La condition de conformité implique

$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \cos \phi_0 / \cos \phi$ , si bien que  $y(\phi) = \cos \phi_0 \psi(\phi)$ , où  $\psi$  est la latitude isométrique (définie section 5.2 p. 55).

Les échelles horizontales et verticales sont égales l'une à l'autre en tout point, mais varient fortement d'une latitude à l'autre. Elles tendent vers l'infini à l'équateur.

La projection de Mercator se zoome facilement, et constitue le standard *de facto* des applications internet, et en particulier Google Maps. Son inconvénient majeur est la disproportion aberrante d'échelle entre les latitudes extratropicales et subtropicales, qui fait apparaître le Groenland bien plus grand que l'Afrique.

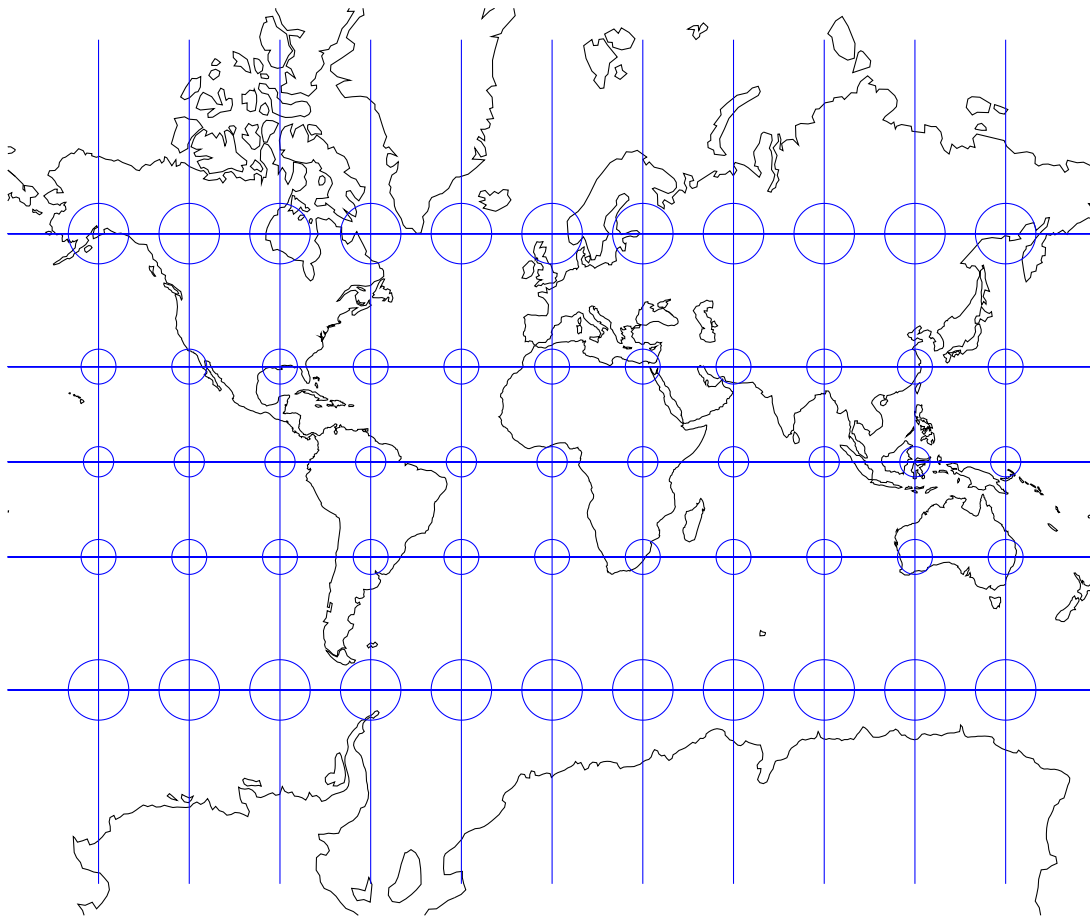


Figure 24: Projection de Mercator

### 10.3 Projections équivalentes

La condition pour une projection équivalente est

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{\cos \phi_0},$$

Avec  $y(0) = 0$ , on a  $y = \sin \phi / \cos \phi_0$ . L'expression de la projection est:

$$x = \cos \phi_0 (\lambda - \lambda_0)$$

$$y = \frac{\sin \phi}{\cos \phi_0}$$

La condition de conformité serait

$$\cos \phi / \cos \phi_0 = \cos \phi_0 / (\cos \phi)$$

Nous voyons qu'elle ne peut pas être respectée en général, mais en particulier à la latitude  $\phi = \phi_0$ , les indicatrices de Tissot sont des cercles et les azimuts sont donc *localement* respectés.

La projection de Lambert (1772) s'obtient pour  $\phi_0 = 0$ , Gall-Peters pour  $\phi_0 = 45^\circ$ , et Tobler (1986) pour  $\cos^2 \phi = 1/\pi$ , soit  $\phi \approx 55^\circ 39' 14''$ .

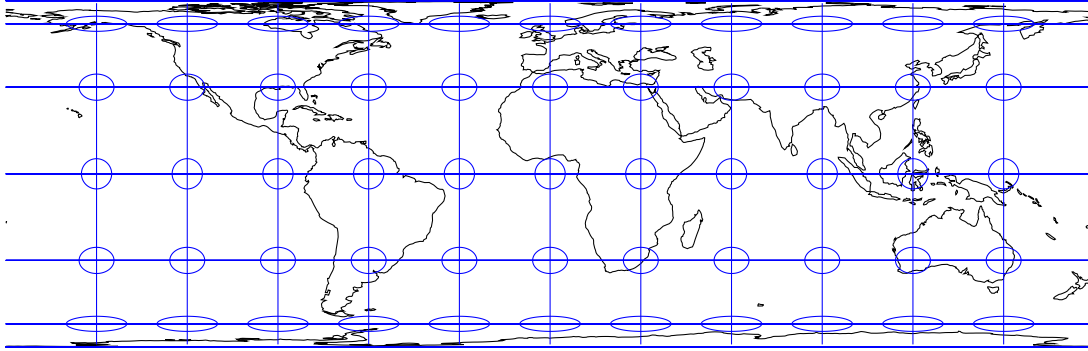


Figure 25: Projection de Lambert et graticule

## 10.4 La projection plate carrée

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda_0), \\ y &= \phi. \end{aligned} \tag{33}$$

## 10.5 Projections pseudo-cylindriques

### 10.5.1 Principe

Les projections pseudo-cylindriques respectent le principe de parallèles rectilignes et horizontaux, mais  $x$  devient également une fonction de la longitude. Les méridiens sont donc déformés, de façon à offrir une section plus courte aux pôles et donc minimiser les déformations engendrées par le critère d'équivalence. De façon générale, les projections pseudo-cylindriques sont utilisées pour représenter la Terre

sur une petite surface.

### 10.5.2 Projection Mollweide (1805)

Sur la projection Mollweide (1805), les méridiens sont représentés par des demi-ellipses et les deux pôles sont réduits à des points. On exige par ailleurs que les méridiens avec une longitude de  $90^\circ$  forment un cercle.

Pour cela, nous devons introduire des expressions paramétriques pour  $x$  et  $y$  — nous les exprimons en fonction d'un paramètre  $\alpha$  — et qui respecte les conditions posées sur le caractère elliptique des méridiens.

On commence donc par:

$$x = A\lambda \cos \alpha$$

$$y = C \sin \alpha$$

Puisqu'on veut un cercle pour  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , il faut que  $A\pi/2 = C$ , ou encore:  $A = \frac{2C}{\pi}$ . On va donc écrire:  $x = \frac{2C}{\pi} \cos \alpha$ .

Par ailleurs, nous allons exiger que la projection soit *équivalente*.

Rappelons dès lors le critère d'équivalence (eq. 29):

$$\frac{1}{\cos \phi} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = 1,$$

Cependant, nous n'avons pas encore accès à  $\phi$ . Nous pouvons cependant utiliser la règle des dérivées en chaîne  $\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\phi}$ , pour obtenir

$$\frac{1}{\cos \phi} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \frac{d\alpha}{d\phi} = 1,$$

On note que  $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$  est nul, et on réarrange les termes:

$$\left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) d\alpha = \cos \phi d\phi,$$

On exécute les dérivées partielles:

$$\frac{2C^2}{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \cos \phi d\phi \quad (34)$$

On intègre de part et d'autre en utilisant l'égalité remarquable  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ :

$$\frac{2C^2}{\pi} \frac{1}{4} (2\alpha + \sin(2\alpha)) = \sin \phi + K,$$

$K$  étant une constante d'intégration.

Nous allons maintenant “caler” le paramètre  $\alpha$  pour qu'il se rapproche d'une latitude réelle, définie telle que nos ellipses soient le plus large à l'équateur  $\alpha = 0$  quand  $\phi = 0$  et qu'elles se ferment au pôle ( $\alpha = \pi/2$  quand  $\phi = \pi/2$ ). La première condition implique  $K = 0$ , et la seconde,  $\frac{C^2}{2} = 1$ .

Notre critère d'équivalence se résume dès lors à:

$$(2\alpha + \sin(2\alpha)) = \pi \sin \phi$$

Cette équation est dite “transcendentale”: elle n’admet pas de solution analytique. En pratique, on cherche sa solution par une méthode d’itération numérique, typiquement la méthode de Newton Raphson.

Pour déterminer les indicatrices de Tissot, on a besoin des dérivées  $\frac{\partial x}{\partial \phi}$  et  $\frac{\partial y}{\partial \phi}$ . On utilise, comme nous l’avons vu, la règle de dérivation en chaîne. Nous avons besoin de  $\frac{d\phi}{d\alpha}$ , qui nous est fourni directement par le critère d’équivalence que nous avons travaillé et exprimé sous la forme (34).

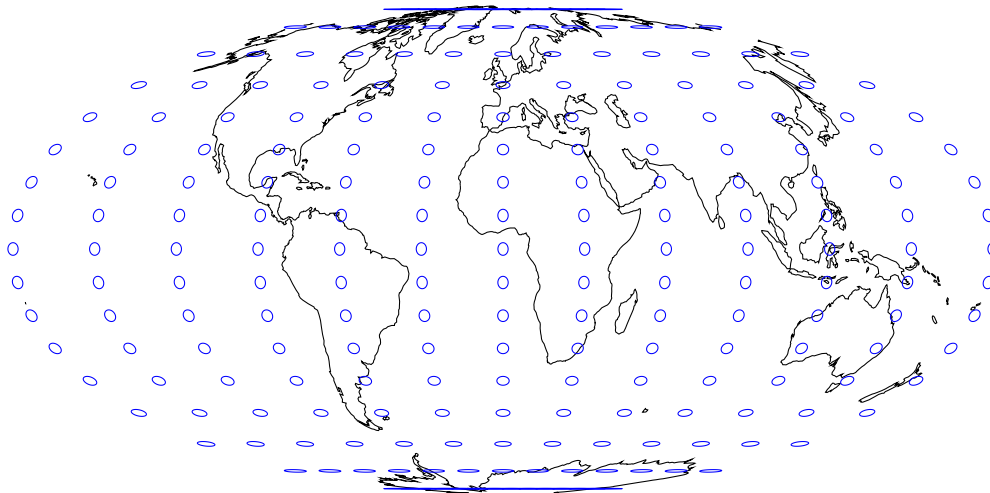


Figure 26: Projection Mollweide et indicatrices de Tissot

### 10.5.3 Projection Eckert IV (1906)

Sur la projection Eckert IV 26 (1906), la longueur du méridien central et celle des lignes polaires sont toutes les trois égales à la moitié de la longueur du parrallèle équatorial. Chaque méridien est une demi-ellipse. Eckert a combiné ces conditions avec un critère d'équivalence.

La projection Eckert IV est donc équivalente.

La formule est donnée par

$$x = \frac{2}{\sqrt{4\pi + \pi^2}}(\lambda - \lambda_0)(1 + \cos \alpha)$$

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{4 + \pi}}(1 + \sin \alpha)$$

La pseudo-latitude  $\alpha$  obéit à la relation suivante:

$$2\alpha + 4 \sin \alpha + \sin(2\alpha) = (\pi + 4) \sin \varphi, \quad (35)$$

où  $\varphi$  est la latitude. Comme pour Mollweide, on la résout par la méthode de Newton-Raphson. Pour le calcul des indicatrices de Tissot, on note

$$2 + 4 \cos \alpha + 2 \cos(2\alpha) = (\pi + 4) \cos \phi \frac{d\phi}{d\alpha}. \quad (36)$$

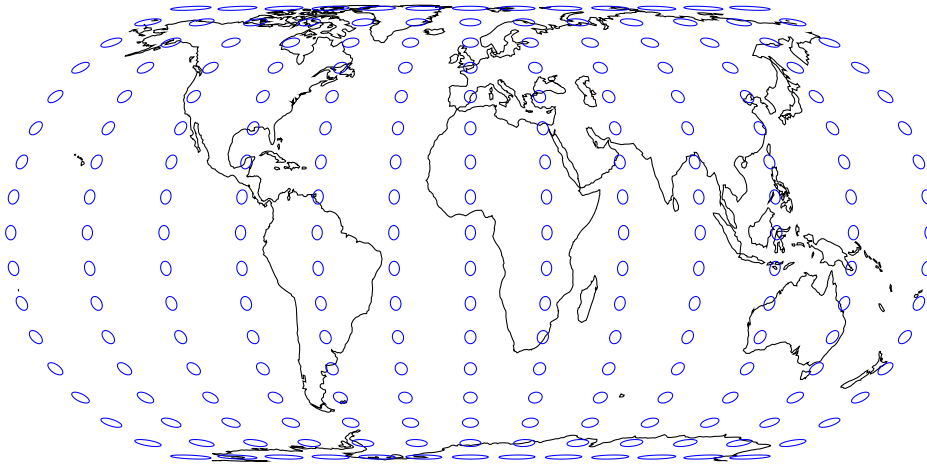


Figure 27: Projection EckertIV et indicatrices de Tissot

La projection pseudo-cylindrique de Eckert connaît plusieurs variantes. Par exemple, dans la projection **Wagner IV**, chaque méridien est plus court qu'une demi-ellipse. Plus précisément, les pôles sont à  $\sqrt{3}/2$  (0.866) de la distance de l'équateur qu'ils ne le seraient si les demi-ellipses étaient complètes. Comme pour la Eckert IV, la longueur du méridien central et celle des lignes polaires sont toutes les trois égales à la moitié de la longueur du parallèle équatorial. La projection Wagner IV est également équivalente.

## 10.6 Cylindriques transverses

### 10.6.1 Pseudo-coordonnées $\phi'$ et $\lambda'$

(ref: Bugayevskiy & Snyder, section 5.1.2)

Nous avons considéré jusqu'ici des projections cylindriques normales, pour lesquelles l'axe du cylindre se confond avec l'axe des pôles. Nous allons maintenant considérer une projection cylindrique transverse, telles que l'axe du cylindre est dans le plan de l'équateur — par

exemple, traverse le cylindre d'Ouest en Est.

La technique pour établir les formules de cette projection consiste à définir une longitude transverse  $\lambda'$  et une latitude transverse  $\phi'$  par rapport à un de pôles percés par l'axe du cylindre (Fig 28).

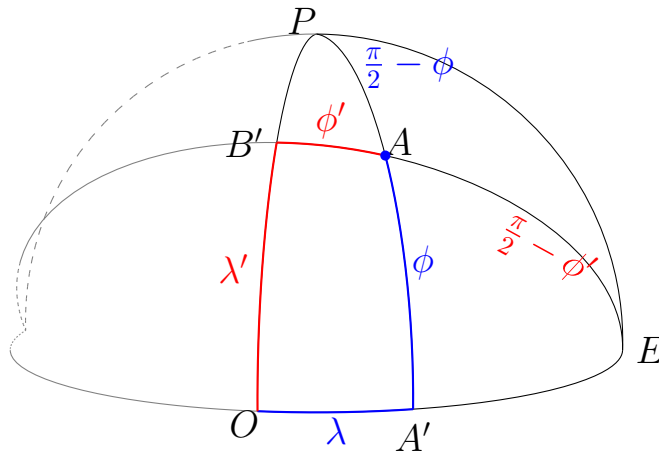


Figure 28: Coordonnées (en bleu) pseudo-coordonnées (en rouge) pour projection transverse.  $P$  est le pôle Nord, référence des coordonnées classiques, et  $E$ , ici localisé sur l'équateur, à  $90^\circ$  E, sert de pôle aux coordonnées transverse.

On fait correspondre les deux systèmes de coordonnées en appliquant la loi de sinus au triangles  $PEA$ ,  $AEA'$  et  $NB'A$ , on trouve:

$$\cos \phi' \sin \lambda' = \sin \phi \quad (37)$$

$$\cos \phi' \cos \lambda' = \cos \phi \cos \lambda \quad (38)$$

$$\sin \phi' = \cos \phi \sin \lambda \quad (39)$$

On peut alors établir n'importe quelle projection cylindrique transverse

en appliquant les formules classiques aux coordonnées transverses, puis en ré-exprimant les coordonnées transverses en fonction des coordonnées classiques.

### 10.6.2 Projection de Cassini

Il s'agit de la plate carrée transverse. On a donc:

$$\begin{aligned}x &= \lambda', \\ y &= y(\phi').\end{aligned}\tag{40}$$

En appliquant les transformations (37)-(39), on trouve:

$$\begin{aligned}x &= a \sin(\cos \phi \sin \lambda), \\ y &= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \phi \sec \lambda)\end{aligned}\tag{41}$$

La projection est représentée Fig. 29. On remarque qu'elle est presque conforme sur le domaine représenté, mais que *ni les parallèles, ni les méridiens ne sont des droites*.

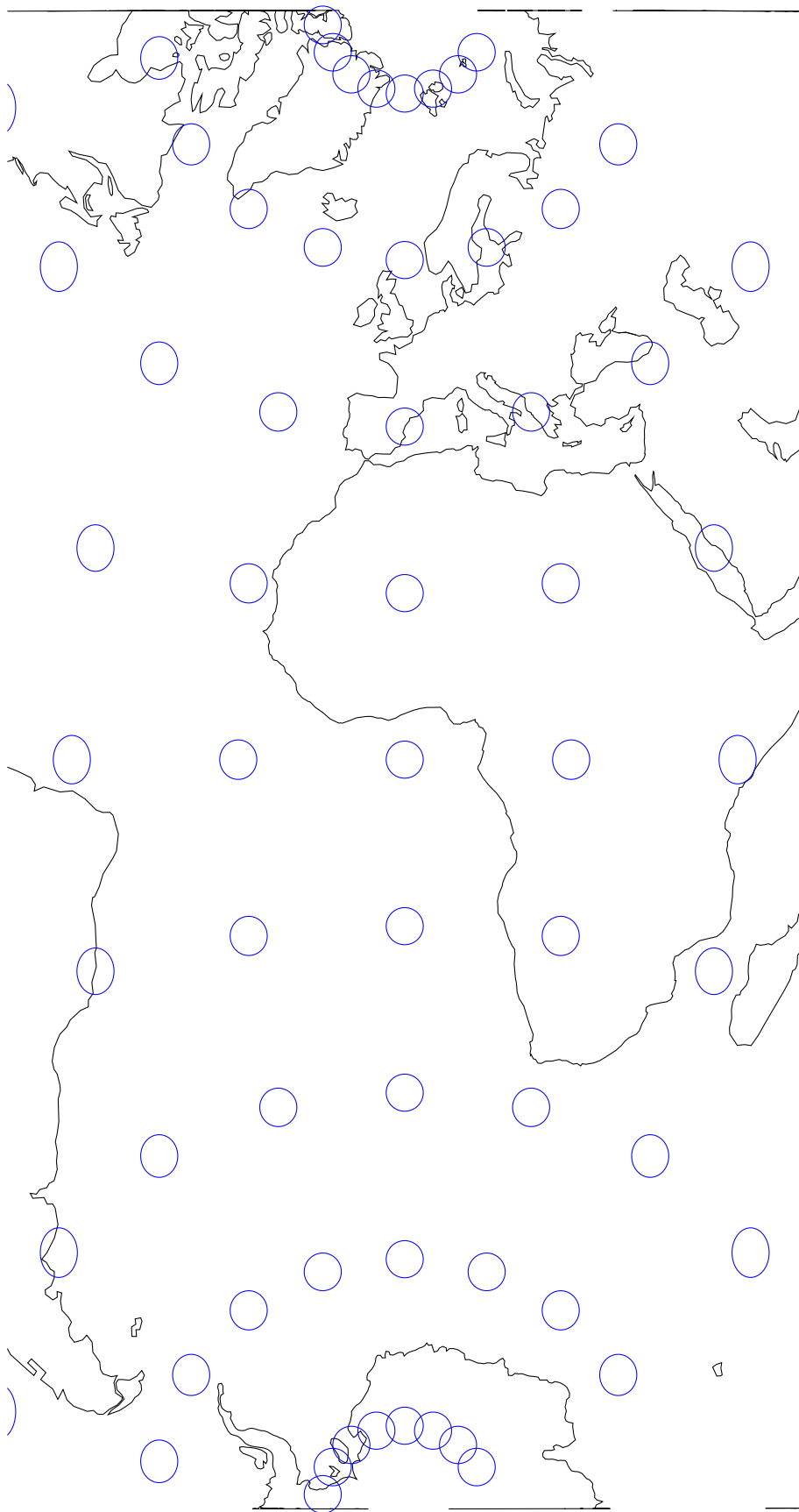


Figure 29: Projection de Cassini : projection transverse sur le modèle de la plate carrée

### 10.6.3 Projection transverse de Mercator et système UTM

La projection transverse de Mercator joue un rôle particulier, car elle sert de base au système de coordonnées “universel” utilisé aux États-Unis et dans une grande partie du monde occidental (Section 10.6.4).

**Définition de la projection** On applique la projection de Mercator classique (Section 10.2) en utilisant des coordonnées transverses. Les formules de base sont :

$$\begin{aligned} x &= \lambda', \\ y(\phi) &= \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Pour préparer le changement de coordonnées, on utilise les transformations suivantes :

$$\operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'},$$

et

$$\ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right).$$

Avec ces formules et quelques calculs, on obtient :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \phi \sin \lambda}{1 - \cos \phi \sin \lambda}, \\
 y &= \arctan(\operatorname{tg} \phi \sec \lambda).
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

**Propriétés** Cette projection transverse est **conforme** et évite les singularités aux pôles Nord et Sud, contrairement à la projection de Mercator classique. En revanche, les pôles Est et Ouest sont rejetés à l'infini.

#### 10.6.4 Système de coordonnées universel : UTM

En pratique, la projection transverse de Mercator est appliquée sur des bandes de 6° de longitude, centrées sur un méridien perpendiculaire aux pôles Est et Ouest. Cette opération est répétée pour les 60 bandes couvrant l'intégralité du globe, sans singularité ni déformation excessive.

Pour chaque bande, on construit un système de coordonnées métriques, avec un facteur d'échelle de 0,9996. Cela implique que un mètre réel le long du méridien central correspond à 0,9996 mètre dans le système de coordonnées ; ce facteur devient légèrement supérieur aux bords de la bande à cause des déformations de la projection.

Ce système permet de positionner n'importe quel élément topographique (bâtiment, lac, etc.) dans une bande donnée, en utilisant des coordonnées exprimées en mètres par rapport à un point de référence, avec une déformation minimale.

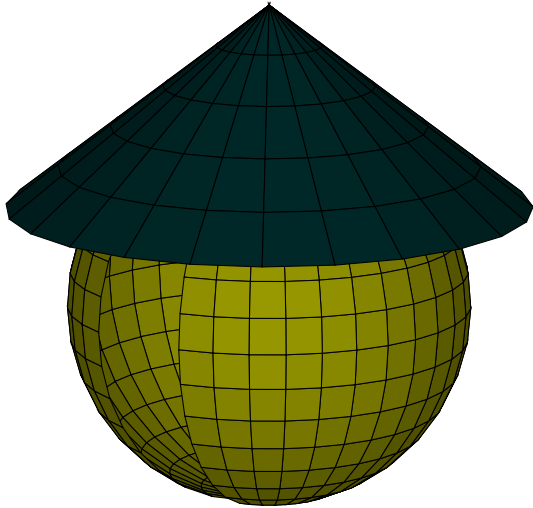
Par convention, le point de référence est placé à 500 km à l'ouest de la limite ouest de la bande. Selon les usages, il peut être situé soit sur l'équateur, soit à 10 000 km au sud de celui-ci.

Tout point du globe peut ainsi être localisé en précisant : - son numéro

de secteur (bande UTM) ; - ses coordonnées (*false Easting* et *false Northing*) dans cette bande.

Comme les coordonnées sont localement compatibles l'hypothèse d'un système de coordonnées cartésiennes en géométrie plane, on peut les utiliser notamment pour mettre en œuvre les relations vues au chapitre 2. On le retrouve d'ailleurs sur les cartes IGN.

## 11 Projections coniques



### 11.1 Définition d'une projection conique

La projection conique peut se visualiser comme une projection de la sphère sur un cône (tangent ou sécant), le plus fréquemment aligné sur l'axe d'un des deux pôles.

Mathématiquement, on décrit la position d'un point sur la projection avec des coordonnées polaires, un rayon  $\rho$  et un angle  $\theta$ , tel que (pour une projection dans l'hémisphère Nord)

$$\begin{aligned}x &= \rho(\varphi) \sin \theta \\y &= y_0 - \rho(\varphi) \cos \theta,\end{aligned}\tag{44}$$

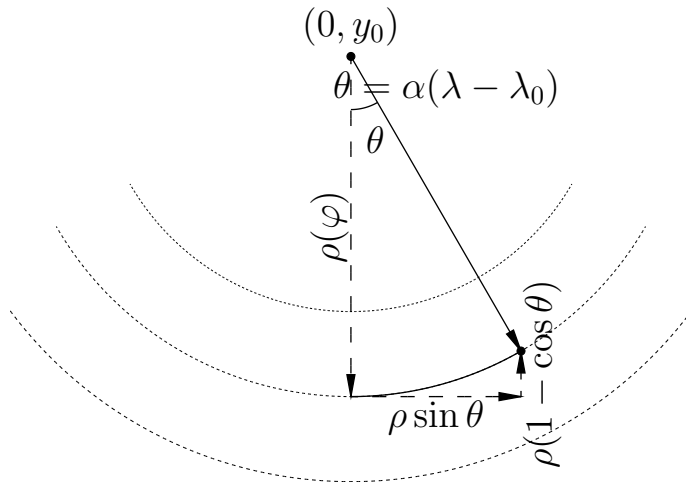
avec

$$\theta = \alpha(\lambda - \lambda_0),$$

si bien que la projection conique s'écrit:

$$\begin{aligned} x &= \rho(\varphi) \sin(\alpha(\lambda - \lambda_0)) \\ y &= y_0 - \rho(\varphi) \cos \theta. \end{aligned} \tag{45}$$

En d'autres termes, les parallèles décrivent des arcs de cercle, centrés en  $(0, y_0)$ , et de rayon  $\rho$  dépendant de la latitude.



Sur base de la théorie des indicatrices de Tissot, on trouve

$$k = \frac{\alpha\rho}{\cos \varphi}; \quad h = -\frac{d\rho}{d\varphi}, \tag{46}$$

L'angle  $\theta$  entre les méridiens et les parallèles projetés est de  $\frac{\pi}{2}$ , ou encore,  $\cos \theta = 0$ .

## 11.2 Projections coniques conformes

### 11.2.1 Dérivation

Le critère de conformité se résume à  $|h| = |k|$ , puisque l'angle entre les méridiens et les parallèles est de  $\pi/2$ , ce qui se traduit par une équation différentielle:

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\alpha\rho}{\cos\varphi}$$

On la résout en isolant  $\frac{d\rho}{\rho} = d \ln \rho$  pour obtenir la solution:

$$\ln \rho = -\alpha\psi(\varphi) + \Rightarrow \rho = \underbrace{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right)^{-\alpha}}_{U(\varphi)},$$

où  $\psi(\varphi)$  est la latitude de Mercator (latitude isométrique) et  $U(\varphi) = \exp(\psi(\varphi))$ .

Nous avons donc créé une *famille* de projections conformes, en fonction du choix de  $\alpha$  (dilatation des longitudes).

$$h = k = K \frac{\alpha U(\varphi)^{-\alpha}}{\cos \varphi}$$

L'échelle varie en fonction de la latitude, et la fonction dépend de  $\alpha$ .

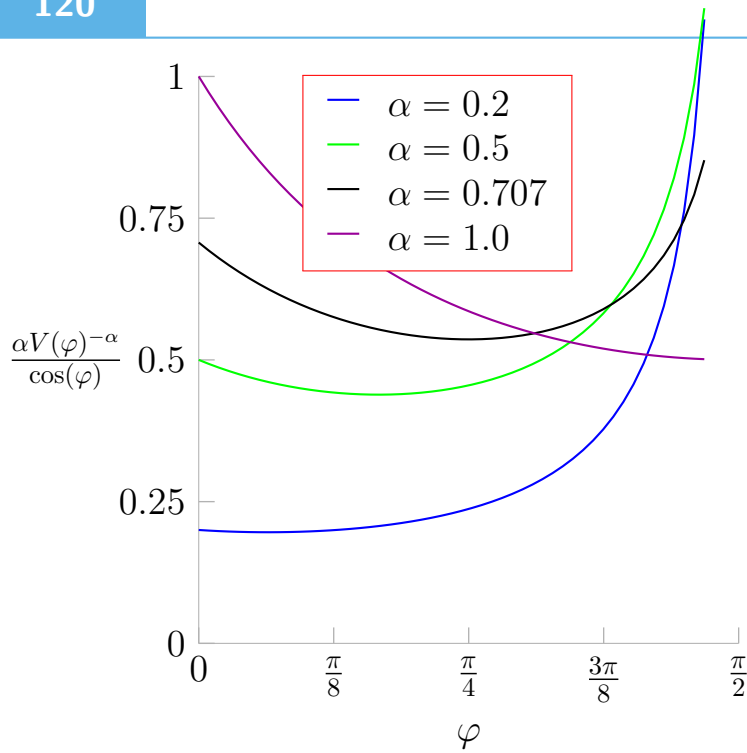


Figure 30: Échelle relative de la projection conique conforme en fonction de la latitude)

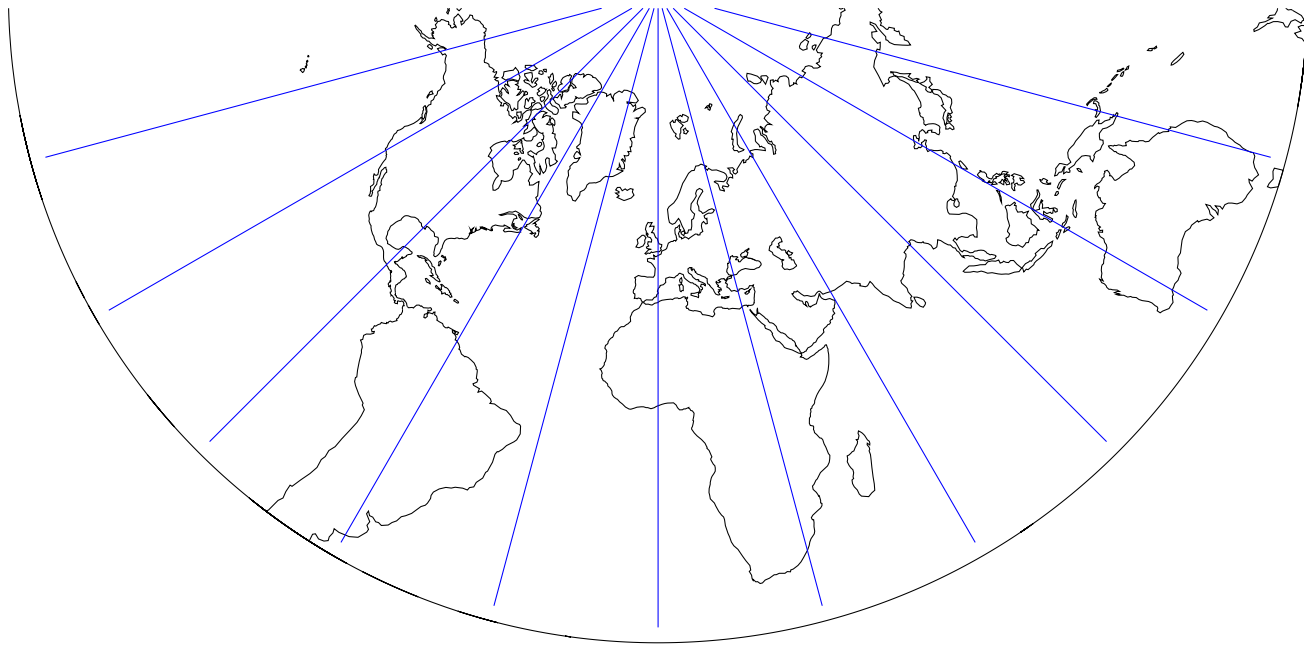


Figure 31: Conique conforme pour  $\alpha = 0.5$

### 11.3 Choix de $\alpha$

Le paramètre  $\alpha$  peut se déterminer d'au moins deux façons différentes

#### 11.3.1 $\alpha$ tel que la latitude à laquelle l'échelle est minimale.

On trouve, après calcul, que  $h$  est *minimum* pour la latitude  $\phi_0$  telle que  $\alpha = \sin \phi_0$ .

#### 11.3.2 Paramètre $\alpha$ tel que l'échelle est identique pour deux latitudes arbitraires.

Dans ce dernier cas, l'équation  $h(\phi_1) = h(\phi_2)$  se traduit par

$$\alpha = \frac{\ln(\cos(\varphi_1)) - \ln(\cos(\varphi_2))}{\ln(U(\varphi_2)) - \ln(U(\varphi_1))}$$

Le paramètre  $K$  peut alors être déterminé pour avoir une échelle choisie à la latitude qu'on veut (ou aux deux latitudes choisies dans le dernier cas).

Il existe des recommandations pour le choix de ces latitudes de référence.

(à faire: ajouter)

#### 11.3.3 Paramètre $\alpha$ tel que la variance de l'échelle est minimale

Cette matière n'est pas vue ici.

## 11.4 Projections coniques équivalentes

On exige que  $hk = 1$ . L'équation différentielle devient (attention au signe -):

$$\alpha\rho \frac{d\rho}{d\varphi} = -\cos\varphi$$

L'équation se résout en notant que  $\rho \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\rho^2}{d\varphi}$ . La solution est

$$\rho = \sqrt{\frac{L - \sin\varphi}{\alpha}},$$

où  $L$  est une constante d'intégration,

Le facteur d'échelle le long d'un méridien satisfait la relation suivante:

$$h^2 = \frac{2\alpha(L - \sin\varphi)}{\cos^2\varphi} \quad (47)$$

on en déduit le facteur d'échelle le long d'un parallèle en appliquant le critère d'équivalence qui veut que  $hk = 1$ :

$$k^2 = 1/h^2 = \frac{\cos^2\varphi}{2\alpha(L - \sin\varphi)} \quad (48)$$

Comme pour les projections conformes, nous avons différentes façons de choisir  $\alpha$ :

**11.5**  $\alpha$  tel que la latitude à laquelle l'échelle le long d'un méridien est minimale.

On trouve, après calcul, que  $h$  est *minimum* pour la latitude  $\varphi_0$  telle que  $\alpha = \sin \varphi_0$ .

Reste alors à déterminer  $L$ . On peut exiger que la projection soit également *conforme* à cette latitude de référence  $\varphi_0$ . On a dans ce cas:

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi_0 &= 2 \sin \varphi_0 (L - \sin \varphi_0) \\ \frac{\cos^2 \varphi_0}{2 \sin \varphi_0} &= (L - \sin \varphi_0) \\ \frac{\cos^2 \varphi_0}{2 \sin \varphi_0} + \sin \varphi_0 &= L\end{aligned}$$

**11.6** Paramètre  $\alpha$  tel que l'échelle le long d'un méridien est identique pour deux latitudes arbitraires.

Dans ce dernier cas, l'équation  $h(\phi_1) = h(\phi_2)$  se traduit par

$$\alpha = \frac{1 \cos^2 \phi_1 - \cos^2 \phi_2}{2 \sin \phi_2 - \sin \phi_1}$$

**11.7** Projections équidistantes

On peut enfin exiger que les distances le long des parallèles *ou* des méridiens soient respectées sur toute la projection. On crée dans ce cas des projections équidistantes.

En pratique, seul le deuxième cas est proposé. On a donc:  $k(\varphi) = k_0$ , ce qui impose simplement

$$\rho(\varphi) = K - k_0\varphi$$

À nouveau, le choix de  $\alpha$  détermine la latitude d'échelle minimale selon les parallèle, avec la relation  $\alpha = \sin \phi_0$ .

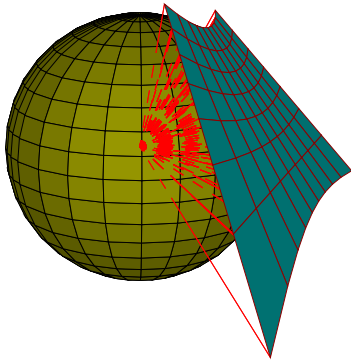
## 12 Projections azimutales

### 12.1 Formule générale de la projection azimutale

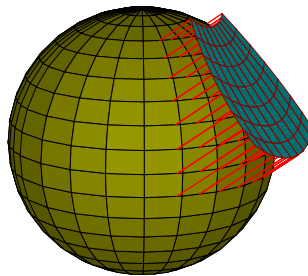
#### 12.1.1 Illustration graphique

Nous nous intéressons à des projections sur un *plan* que nous considérerons ici comme perpendiculaire (tangent) en un point du globe, de coordonnées géodésiques  $(\varphi_0, \lambda_0)$ . Selon la façon dont les points de la sphère sont projetés, on aura différentes projections dont nous allons étudier les propriétés.

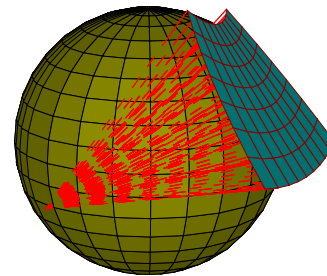
Gnomonique  
rayons partant du centre



Orthographique  
rayons parallèles



Stéréographique  
rayons partant de l'antipode



#### 12.1.2 Coordonnées azimutales locales

Pour en dériver l'expression mathématique, nous devons d'abord définir les coordonnées azimutales *topocentriques* (centrées en un lieu). Construisons trois vecteurs de base,  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  et  $\hat{e}_z$ , de longueurs unitaires, dirigés vers l'Est, le Nord et le Nadir, et centrés sur  $(\varphi_0, \lambda_0)$ .

On peut montrer <sup>5</sup> que les coordonnées d'un point à la surface, de coordonnées  $(\phi, \lambda)$  seront (pour un globe sphérique de rayon  $R = 1$ ):

$$X = \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)$$

$$Y = (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0))$$

$$Z = (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)) - 1$$

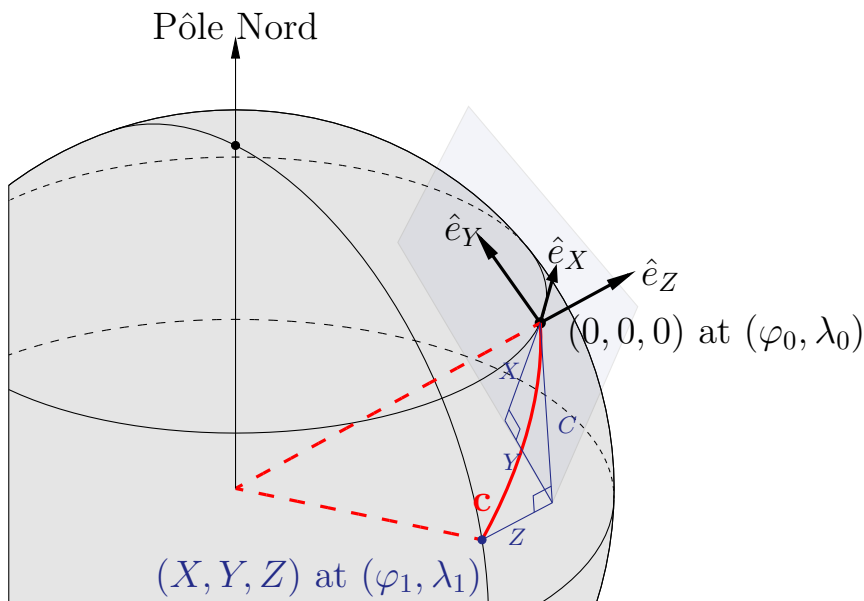


Figure 32: Coordonnées azimutales  $X, Y, Z$  centrées en  $(\varphi_0, \lambda_0)$ .

On peut réexprimer  $X, Y$  sous la forme de coordonnées azimutales (l'angle  $\gamma$  est l'azimut compté à partir du Nord (cf. avertissement)):

$$\begin{aligned} X &= C \sin \gamma \\ Y &= C \cos \gamma \end{aligned} \tag{49}$$

Par ailleurs, l'arc de grand cercle  $c$  obéit à la formule de l'orthodromie

<sup>5</sup>la démonstration sera pour une version ultérieure des notes

telle que nous l'avons vue p. 51, éq. 10:

$$\cos c = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \delta \lambda.$$

On peut voir alors que  $C = \sin c$ , car  $c$  peut s'interpréter comme un angle au centre de la sphère définissant un arc de grand cercle, et son cosinus correspond à un segment parallèle à  $(X, Y, 0)$  dans le système de coordonnées  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ . On peut aussi, mais c'est plus fastidieux, vérifier par calcul que  $X^2 + Y^2 = C^2$ . (Figure 33).

### 12.1.3 Définition mathématique des coordonnées azimutales

Une projection azimutale associée à un point de référence  $(\varphi_0, \lambda_0)$  obéit à la relation

$$\begin{aligned} x &= \rho(c) \sin \gamma \\ y &= \rho(c) \cos \gamma \end{aligned} \tag{50}$$

où  $\gamma$  est le même azimut que celui défini pour les coordonnées azimutales ci-dessus. Le rayon  $\rho$  est une fonction de  $c$ , qui est choisi en fonction des propriétés désirées. Considérons donc un cercle, sur la sphère, de rayon  $c$ , centré en  $(\varphi_0, \lambda_0)$ . Attention, la distance  $c$  est mesurée sur la sphère. On remarque toutefois que ce cercle est dans un plan, et que dans ce plan son rayon est  $\sin c$ . Un pas  $d\gamma$  le long du cercle se traduit par un incrément de distance  $\sin c d\gamma$ . Sur la projection, ce pas se traduit par un incrément  $\rho d\gamma$ . Ainsi, le long de la tangente au cercle, la distorsion (notée  $a$ ) vaut:

$$a = \frac{\rho(c)}{\sin c}$$

Dans la direction radiale, un pas  $dc$  se traduit sur le globe par un incrément de distance  $dc$ , et sur la projection,  $d\rho$ . Le long des rayons, la distorsion (notée  $b$ ) vaut donc:

$$b = \frac{d\rho}{dc}$$

On s'attend à ce que l'indicatrice de Tissot tracée à un point arbitraire  $x, y$  soit une ellipse, dont un axe est aligné sur le rayon qui joint le point d'intérêt au centre de la projection (un rayon est une ligne d'égal  $\gamma$ ), l'autre axe étant perpendiculaire.

On a une projection conforme pour  $a = b$ , et une projection équivalente pour  $ab = 1$ .

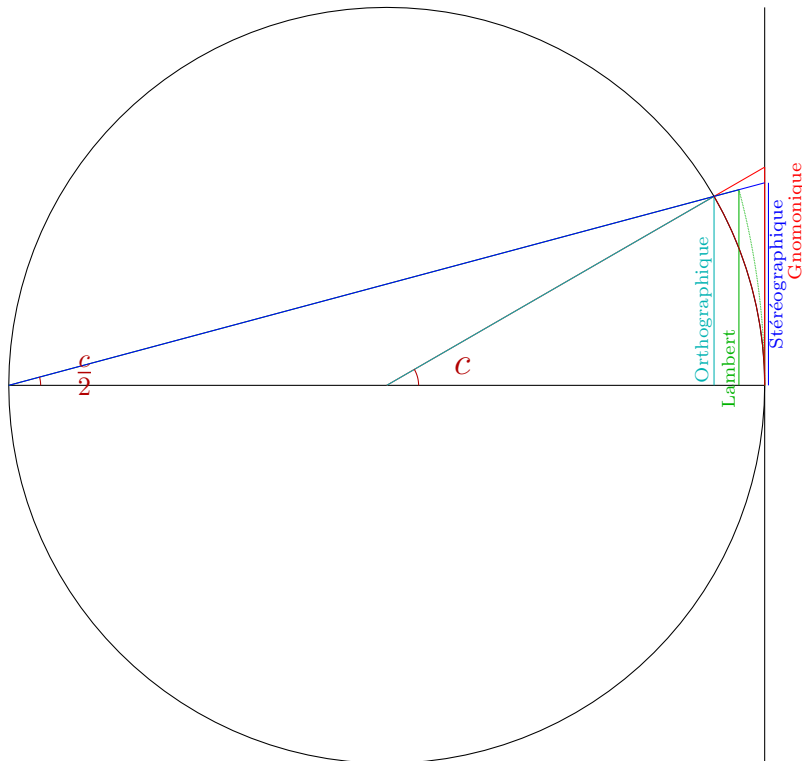


Figure 33: Comparaison de différentes projections azimutales, sur un plan passant par un point de référence.

### 12.1.4 Projection orthographique

La projection orthographique se définit alors simplement  $\rho = C = \sin c$   
Donc:

$$x = X = \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)$$

$$y = Y = (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0))$$

Bon compromis, mais n'est ni équivalent ni conforme

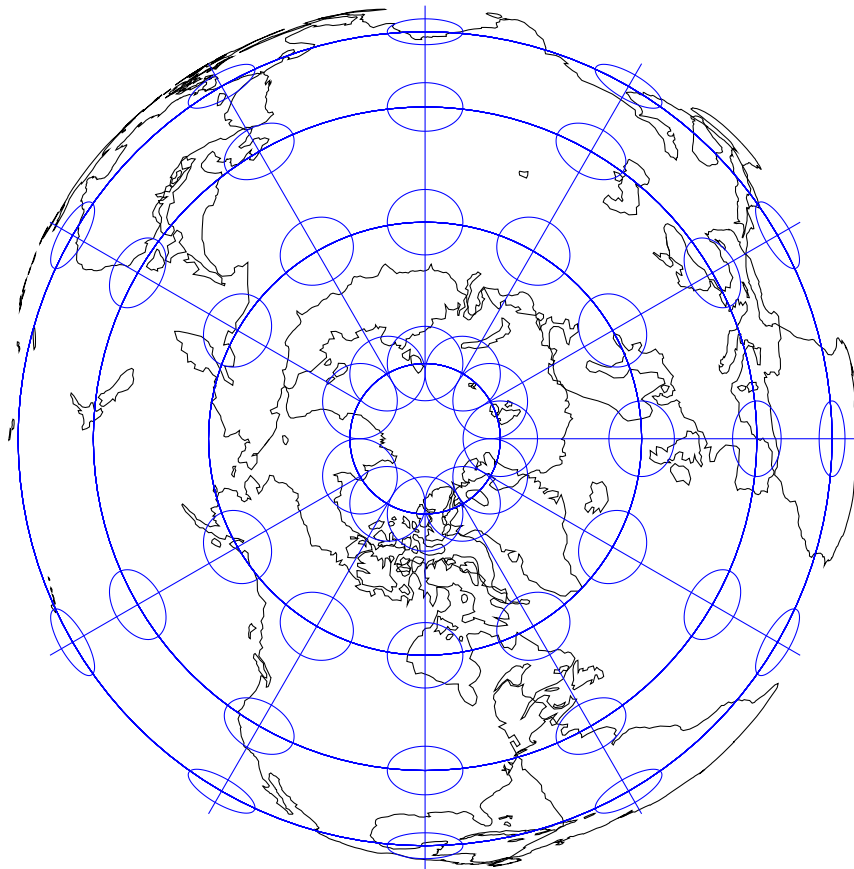


Figure 34: Azimutale polaire orthographique

### 12.1.5 Projection gnomonique

$$\rho = R \operatorname{tg} c$$

Déforme très fort, mais projette les grands cercles comme des droites, donc présente les orthodromies comme des segments de droite (préserve donc le chemin le plus court)

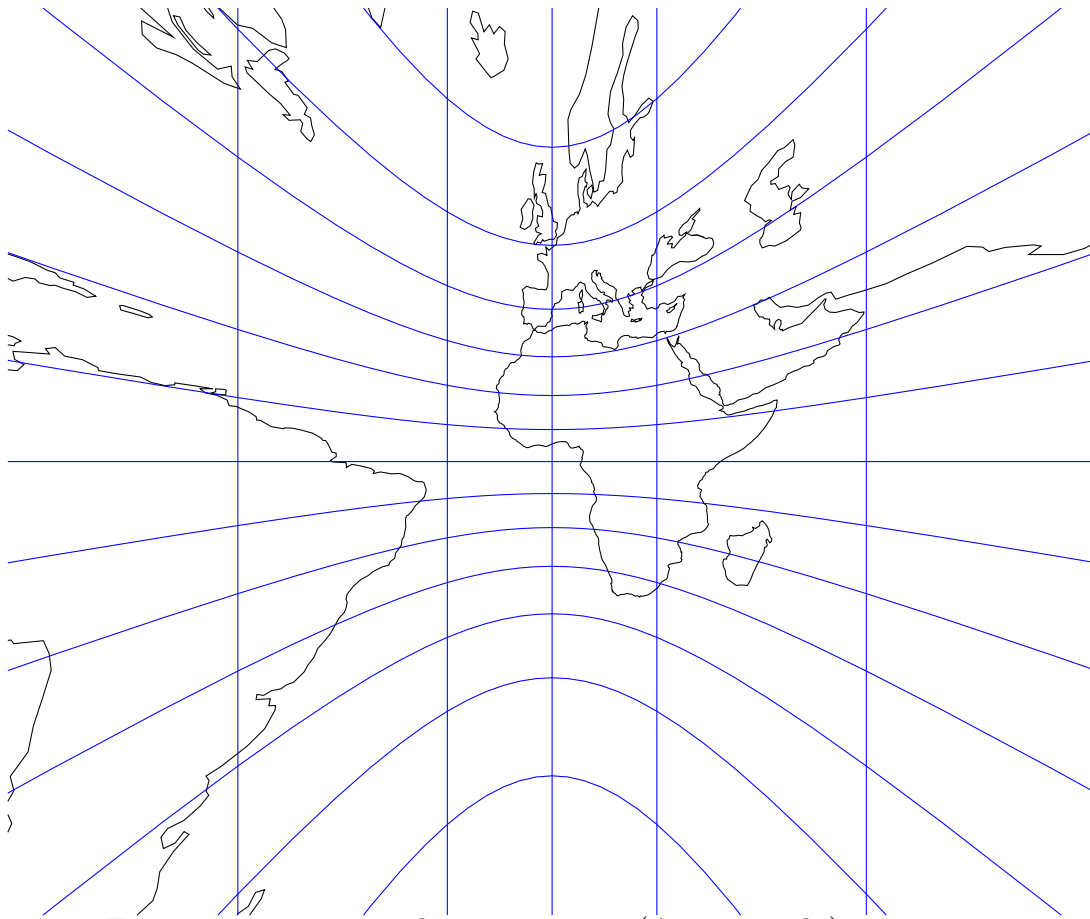


Figure 35: azimutale transverse (équatoriale) gnomonique

### 12.1.6 Projection stéréographique

$$\rho = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

On vérifie qu'elle est conforme (exercice)

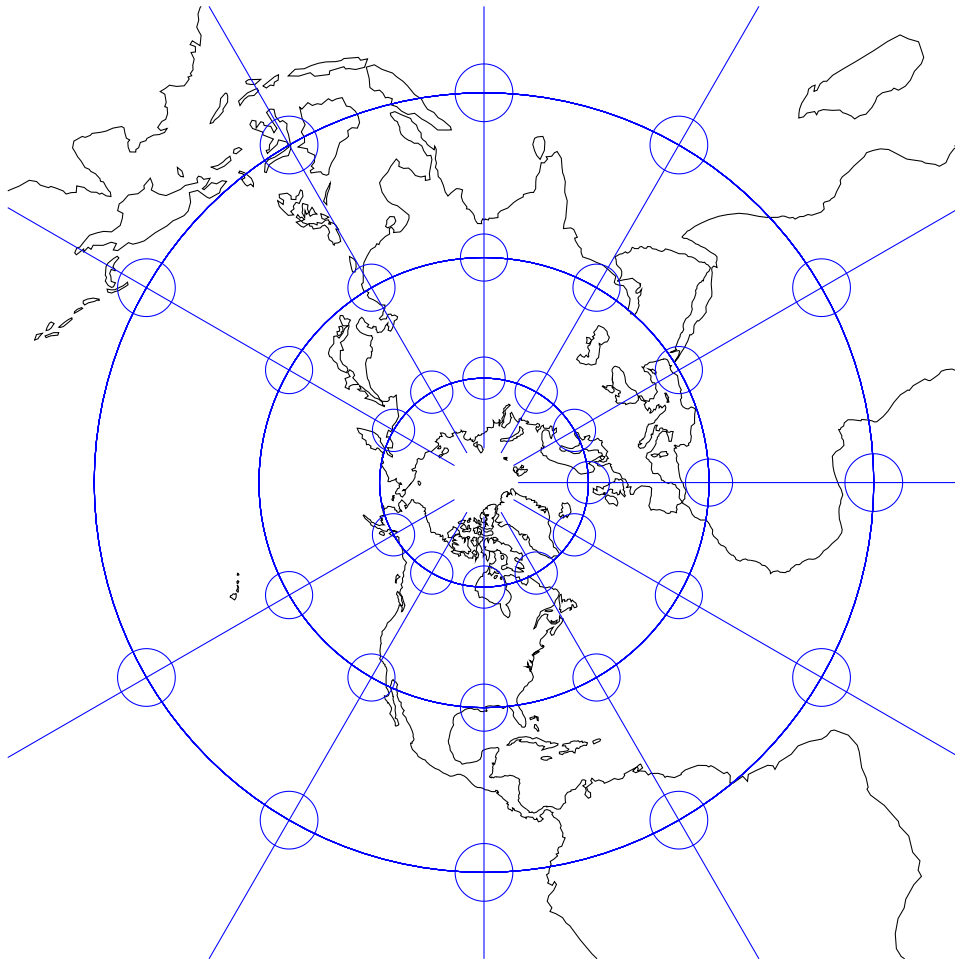


Figure 36: Azimutale polaire stéréographique



Figure 37: azimutale transverse (équatoriale) stéréographique

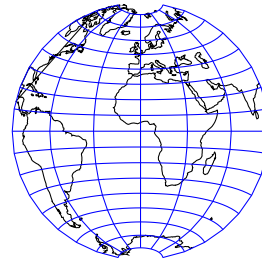


Figure 38: azimutale transverse (équatoriale) équivalente de Lambert

### 12.1.7 Projection équivalente

L'équation différentielle à résoudre pour en projection équivalente est  $a \cdot b = 1$ :

$$\frac{\rho(c)}{\sin c} \cdot \frac{d\rho}{R dc} = 1 \quad (51)$$

C'est donc une équation différentielle de  $\rho$  en fonction de  $c$ . On applique la technique classique qui consiste à isoler les  $d\rho$  à gauche et les  $dc$  à droite, soit

$$\rho d\rho = \sin c dc. \quad (52)$$

On se souvient que  $\rho d\rho = \frac{1}{2} d\rho^2$  et que  $\sin c dc = -d \cos c$ . On a donc

$$\frac{1}{2} d\rho^2 = -d \cos c,$$

ce qui s'intègre pour donner

$$\frac{1}{2}\rho^2 = -\cos c + \text{Constante d'intégration.}$$

La constante d'intégration s'obtient en imposant que  $\rho = 0$  pour  $c = 0$  (centre de la projection), donc elle vaut 1.

L'équation  $\frac{1}{2}\rho^2 = (1 - \cos c)$  peut se retravailler avec les relations trigonométriques pour donner

$$\rho = 2 \sin \frac{c}{2}. \quad (53)$$

C'est la projection équivalente de Lambert.

## 12.2 Classification en fonction du point de référence:

encore à faire

- ▷ projections polaires
- ▷ projections obliques
- ▷ projections transverses, ou équatoriales

## A Appendice: représentation algébrique des propriétés de l'indicatrice

Nous voulons représenter la déformation d'incrément différentiels  $(d\phi, d\Lambda)$  positionnés sur le cercle unitaire sur la sphère. Les règles du calcul différentiel peuvent prendre une forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \Lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \end{pmatrix}}_{J(x,y)} \begin{pmatrix} d\phi \\ d\Lambda \end{pmatrix},$$

ce qu'on peut réécrire:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\phi \\ d\Lambda \end{pmatrix}.$$

La théorie de l'algèbre linéaire nous enseigne que, sous des conditions assez générales, la matrice  $J(x, y)$  se décompose en un produit de trois opérations: une rotation (une matrice unitaire 2x2), une mise à l'échelle des axes (cela prend la forme d'une matrice diagonale), et une deuxième rotation.

La première rotation est celle qui aligne les axes "bleus" (Fig. 21) selon l'horizontale et la verticale; la mise à l'échelle des axes applatit le disque et fait naître les demi-grand et demi-petit axes  $a$  et  $b$ , et la deuxième rotation tourne les axes pour les amener dans leur direction finale (voir à nouveau Fig. 21).

En termes d'algèbre, cette décomposition en trois opérations est une application de la décomposition en valeurs singulières:  $J = UDV^*$ , où  $U$  et  $V$  sont des matrices orthonormales (des rotations),  $D$  est une matrice diagonale (mise à l'échelle des axes). La notion  $V^*$  dénote la

matrice transposée conjuguée de  $V$  (simplement la transposée quand les nombres sont réels).

En calculant la matrice  $D$ , on trouve d'emblée les valeurs de demi-axes  $a$  et  $b$ . En général, le calcul ne se fait pas à la main mais plutôt à l'aide d'algorithmes informatisés. Cependant, dans le cas d'une matrice  $2 \times 2$  comme ici, on peut retrouver  $D$  assez facilement. Notons d'abord que, comme  $U$  et  $V$  sont orthonormales,  $V^*V = U^*U = 1$ . On a alors

$$J^*J = VDU^*UDV^* = VD^2V^* \Rightarrow V^*(J^*J) = D^2V^*$$

Cette expression signifie que  $J^*J$  a pour valeurs propres les carrés des éléments diagonaux de  $D$ , et pour vecteurs propres les colonnes de  $V$  (les lignes de  $V^*$ ). On peut percevoir cette propriété de façon un peu plus intuitive en observant comment se comporte le produit scalaire d'un vecteur infinitésimal  $(dx, dy)$  de norme  $ds$  avec lui-même:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\phi & d\Lambda \end{pmatrix} J^*J \begin{pmatrix} d\phi \\ d\Lambda \end{pmatrix}$$

Considérons le cas particulier où le déplacement est aligné sur un des axes de l'indicatrice de Tissot, mettons l'axe  $a$ . Notons le vecteur infinitésimal sur la sphère  $(d\phi, d\Lambda)_a$ , et sa projection  $(dx, dy)_a$ . Comme il s'agit d'un vecteur propre (associé à la valeur propre  $a$ ),

$$J \begin{pmatrix} d\phi \\ d\Lambda \end{pmatrix}_a = a(dx, dy)_a$$

La norme du déplacement  $ds_a$  projeté vaut donc, dans ce cas particulier

$$ds_a^2 = (dx \ dy)_a \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}_a = (d\phi \ d\Lambda)_a aa^* \begin{pmatrix} d\phi \\ d\Lambda \end{pmatrix}_a = a^2 dS^2;$$

et de même, selon  $b$ , on aura  $ds_b^2 = b^2 dS^2$ . De façon générale,  $(dx, dy)$  est une combinaison linéaire des deux vecteurs propres associés aux axes de l'indicatrice de Tissot:

$$(dx, dy) = \sin \zeta (dx, dy)_a + \cos \zeta (dx, dy)_b$$

et  $ds^2 = a^2 \sin^2 \zeta + b^2 \cos^2 \zeta$ ;  $ds$  est donc compris entre  $a$  et  $b$ .

La matrice  $J^*J$  porte le nom de métrique. Notons par ailleurs que

$$J^*J = \begin{pmatrix} h^2 & hk \cos \theta \\ hk \cos \theta & k^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la métrique vaut  $h^2k^2 \sin^2 \theta$ ; c'est le carré de l'aire couverte par un élément de surface sous-tendu par un incrément infinitésimal dans deux directions orthogonales. Les valeurs propres  $a^2$  et  $b^2$  s'obtiennent en résolvant l'équation caractéristique  $|J^*J - x\mathbb{I}| = 0$  où  $x$  est l'inconnue. Cela revient à  $(h^2 - x)(k^2 - x) - h^2k^2 \cos^2 \theta = 0$ . Cette équation n'est pas si difficile à résoudre, et permet d'aboutir aux solutions déjà connues pour  $a$  et  $b$  (eq. 27).

## B Appendice: incréments de distance sur l'ellipsoïde

Nous tenons ici compte du caractère ellipsoïde du géoïde. La Figure 39 est un coupe transversale du géoïde et fait donc apparaître en trait plein la forme d'un méridien.

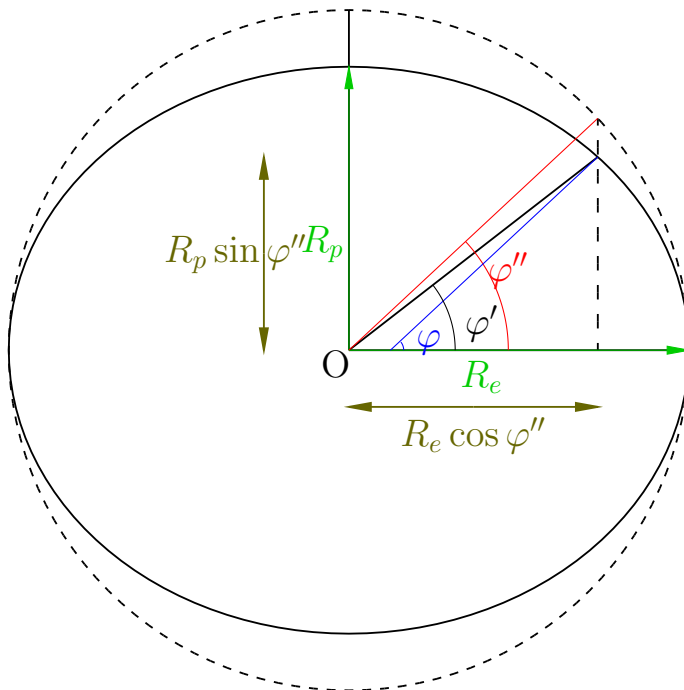


Figure 39: Coupe transversale du géoïde (en trait plein) de rayons équatorial  $R_e$  et polaire  $R_p$ , avec la latitude excentrique ( $\varphi''$ ), géocentrique  $\varphi'$  et géodésique ( $\varphi$ ).

### B.1 Le long d'un parallèle

Le long d'un parallèle, l'incrément de longitude se fait le long d'un cercle de rayon  $R_e \cos \varphi''$ , soit

$$d\Lambda = R_e \cos \varphi'' d\lambda \quad (54)$$

On peut utiliser la relation  $\operatorname{tg} \varphi'' = (1 - f) \operatorname{tg} \varphi$ , et  $\cos \varphi'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi''}}$  pour obtenir la relation définitive. Pour nous conformer aux expressions standard, nous allons avoir besoin des identités suivantes:

$$1 - f = \frac{R_p}{R_e} = \sqrt{1 - e^2},$$

où  $e$  est l'excentricité.

On poursuit, sur cette base, le développement de  $\cos \varphi''$ :

$$\cos \varphi'' = \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \sin^2 \varphi}}.$$

On profite de Pythagore pour nettoyer le dénominateur et on aboutit à

$$R_e \cos \varphi = \frac{R_e \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \stackrel{\text{def}}{=} N \cos \varphi \quad (55)$$

Se déplacer d'un incrément  $d\lambda$  à une latitude géodésique  $\varphi$  revient donc à parcourir une distance  $d\Lambda = N \cos \varphi d\lambda$ .

## B.2 Le long d'un méridien

Le long d'un méridien, il faut tenir compte du *rayon de courbure*  $M$  de l'ellipse, qui dépend de la latitude. De façon générale, l'ellipse que constitue le méridien est une courbe paramétrique, spécifiquement:

$$(x, y) = (R_e \cos \varphi'', R_p \sin \varphi'')$$

où les coordonnées  $(x, y)$  font ici référence au rayon vecteur centré sur la centre de la Terre. Le *rayon* de courbure d'une courbe paramétrique (ici le paramètre est  $\varphi''$ ) répond à l'équation suivante

$$M(\varphi'') = \left| \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \right|,$$

où  $\dot{x}$  est  $\frac{dx}{d\varphi''}$ , etc.

Le dénominateur est en réalité assez facile à calculer, grâce une fois de plus à Pythagore, et vaut  $R_e R_p$ . Après calcul on trouve que

$$M(\varphi'') = \frac{1}{R_e R_p} (R_p^2 \cos^2 \varphi'' + R_e^2 \sin^2 \varphi'')^{\frac{3}{2}}.$$

Pour simplifier cette équation, il faut utiliser Pythagore pour supprimer le terme  $\cos^2 \varphi''$ , et utiliser la formule

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi'' &= \frac{1}{1 + \cotg^2 \varphi''} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2 \cotg^2 \varphi} \\ &= \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

On supprime  $\cos^2 \varphi$  au profit de termes en  $\sin^2 \varphi$  par Pythagore. Après calcul on a

$$M = R_e \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (56)$$

Se déplacer d'un incrément  $d\varphi$  le long du méridien revient donc à parcourir une distance  $d\Phi = M d\varphi$ .

## References

### List de théorèmes

1: Théorème du triangle inscrit . . . . .	24
2: Relations entre latitudes . . . . .	40
3: Relation des triangles conjugués . . . . .	50
4: Directions propres . . . . .	93

**Liste de relations clé**

1: Pythagore . . . . .	12
2: Sinus et cosinus d'angles remarquables . . . . .	13
3: Sinus et cosinus d'une somme . . . . .	15
4: Simpson . . . . .	15
5: Rapports entre côtes et angles dans le plan . . . . .	17
6: Résolution du triangle dans la plan . . . . .	18
7: Pythagore . . . . .	20
8: Distances à deux points de coordonnées et azimuth connus . . . . .	23
9: Coordonnées sphériques avec la latitude . . . . .	32
10: Relation entre les angles horaires mesurés par deux observateurs distincts . . . . .	67
11: Relation entre angle horaire et temps sidéral . . . . .	71
12: Orientation et grandeurs des demi-grand axes de l'indicatrice . . . . .	95
13: Déformation des angles . . . . .	99

**Liste d'exercices**

1: Promenade le long de la mer . . . . .	19
2: Du haut de la tour Eiffel . . . . .	19
3: Blue Marble . . . . .	19
4: Le géopotential au pôle . . . . .	36
5: Se sent-on plus léger? . . . . .	39
6: L'attrait de la montagne . . . . .	44
7: Orthodromie de cas simples . . . . .	52
8: Propriété de la latitude isométrique . . . . .	55
9: Transatlantique . . . . .	55
10: Distance zénithale d'un cas simple . . . . .	62
11: Lever et coucher d'une étoile . . . . .	72
12: Le globe générateur . . . . .	87
13: Tracer une indicatrice de Tissot . . . . .	95